

CURS DE FIZICĂ

Aplicații

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
Universitatea Petrol-Gaze din Ploiești
Departamentul de Învățământ la Distanță
și cu Frecvență Redusă

LIANA ȘANDRU

CURS DE F I Z I C Ă
APLICAȚII

Editura Universității Petrol-Gaze din Ploiești
2010

PREFAȚĂ

Îmi revine plăcuta misiune de a prefața o carte deosebită a unei autoare deosebite, atât ca structură intelectuală, cât mai ales ca pregătire profesională.

Autoarea este cunoscută pentru activitatea sa științifică în domeniul tehnicilor de investigare a materialelor ceramice și bazaltice, precum și în domeniul proprietăților dielectrice și feroelectrice a materialelor ceramice, în același timp și pentru pasiunea cu care își desfășoară activitatea de dascăl și cercetător în domeniul fizicii clasice și moderne.

Cartea cuprinde toate capitolele de fizică cunoscute de la principiile mecanicii clasice, principiile mecanicii analitice, elemente de teoria relativității restrânse, fizica fluidelor, termodinamica și fizica statistică, electromagnetism și electrodinamică, elemente de mecanică cuantică, fizica atomului și moleculei, fizica solidului, fizica nucleului atomic și a particulelor elementare.

Cartea este utilă atât studenților de la învățământul cu profil tehnic, studenților de la învățământul universitar de specialitate, cât și celor care doresc să-și lărgescă orizontul intelectual în domeniile capitolelor enumerate mai sus. Sunt convins că acest manual poate fi utilizat și de o parte a elevilor din ultima clasă de liceu, care se pregătesc pentru admiterea la facultățile de fizică și la cele tehnice.

Prin numeroasele exemple și prin grafica deosebită realizată de autoare, cartea este utilizată cu multă căldură de toți cei interesați în domeniul fizicii clasice și moderne.

Prof. univ. dr. Mihai Toader
Universitatea Politehnică din Timișoara

CUVÂNT ÎNAINTE

Cursul se adresează în primul rând studenților de la Facultatea de Inginerie Mecanică și Electrică, forma Învățământ la Distanță și cu Frecvență Redusă.

Pornind de la locul fizicii în formarea viitorilor ingineri, am încercat și cred ca în bună măsură am reușit să selectez acele cunoștințe de fizică care se integrează armonios în pregătirea de specialitate, în condițiile progresului tehnic contemporan.

Logica ordonării materialului prezentat în manual, are la bază programele analitice în vigoare și este subordonată realităților contactului direct al specialistului cu realizările moderne din domeniul tehnicii. Se are în vedere pregătirea specialistului pentru atmosfera de creație, de gândire inginerescă și de dobândire a unei culturi științifice și tehnice, necesare activității de proiectare sau de elaborare a unor sisteme tehnice sau tehnologice.

Cunoștințele și deprinderile dobândite la cursul de fizică trebuie să dezvolte la studenți cultura generală fundamentală necesară înțelegerii fenomenelor la disciplinele de cultură tehnică generală și de specialitate.

Pentru sugestiile și observațiile făcute cu ocazia verificării conținutului științific al cursului de fizică, mulțumesc următoarelor cadre didactice de la Universitatea POLITEHNICĂ din Timișoara: Prof.univ.dr.ing. Liviu Brândeș, Prof.univ.dr.ing. Ioan Fitero, Prof.univ.dr.ing. Mihai Jădăneanț, Prof.univ.dr.mat. Mihai Toader, Conf.univ.dr.fiz. Aurel Ercuția, Universitatea de Vest din Timișoara și de la Universitatea Petrol-Gaze din Ploiești: Conf.univ. Neacșu Marian și Șef lucrări dr. Hotinceanu Mihai.

Conf. univ. dr. fiz. Liana A. Șandru

CUPRINS

MODULUL I. FIZICA CLASICĂ	14
1. PRINCIPIILE MECANICII CLASICE	14
1.1. Legile mecanicii pentru punctul material.....	14
1.2. Câmp de forțe	33
1.3. Legile mecanicii pentru sisteme de puncte materiale	36
Aplicații.....	39
2. PRINCIPIILE MECANICII ANALITICE.....	41
2.1. Ecuațiile Lagrange	41
2.2. Ecuațiile Hamilton	42
2.3. Mișcarea oscilatorie armonică	43
Aplicații.....	45
3. ELEMENTE DE TEORIA RELATIVITAȚII RESTRÂNSE	51
3.1. Transformările Lorenz-Einstein.....	51
3.2. Consecințe ale transformărilor Lorentz-Einstein.....	54
3.2.1. Con tracția lungimilor	55
3.2.2. Dilatarea intervalelor de timp	55
3.3. Dinamica relativistă	56
Aplicații.....	58
4. FIZICA FLUIDELOR.....	61
4.1. Statica fluidelor.....	61
4.2. Dinamica fluidelor reale.....	62
4.3. Teoria cinetico-moleculară a gazelor.....	63
4.3.1. Gaze reale	63
Aplicații.....	67
TEST DE AUTOEVALUARE I	68

MODULUL II	72
5. TERMODINAMICA	72
5.1. Principiul zero al termodinamicii	72
5.2. Principiul întâi al termodinamicii.....	72
Aplicații	77
5.3. Principiul al doilea al termodinamicii.....	79
Aplicații	82
5.4. Principiul al treilea al termodinamicii	83
Aplicații	84
TEST DE AUTOEVALUARE II.....	87
MODULUL III.....	90
6. ELECTROMAGNETISM	90
6.1. Electrostatica	90
6.1.1. Legea lui Gauss pentru medii omogene.....	90
6.1.2. Vectorul inducție electrică	93
6.1.3. Energia câmpului electric.....	95
6.2. Electrocinetica	98
6.2.1. Legea conservării sarcinilor electrice	98
6.2.2. Legea lui Ohm pentru densitatea de curent.....	99
6.3. Magnetostatica	100
6.3.1. Legea circuitului magnetic	101
Aplicații	103
6.3.2. Substanța în câmp magnetic	104
6.4. Electromagnetism.....	107
6.4.1. Energia câmpului magnetic.....	107
6.4.2. Curentul de deplasare. Inducția magnetoelectrică.....	109
Aplicații	111
Aplicații	115
TEST DE AUTOEVALUARE III	116

MODULUL IV. FIZICA MODERNĂ	121
7. BAZELE FIZICE ALE MECANICII CUANTICE.....	121
7.1. Natura corpusculară a radiației	121
Aplicații.....	124
7.2. Natura ondulatorie a particulelor	135
Aplicații.....	140
8. MECANICA CUANTICĂ	142
8.1. Postulate ale mecanicii cuantice	142
8.2. Momentul cinetic în mecanica cuantică.....	144
8.3. Ecuația lui Schrödinger pentru mișcarea nerelativistă.....	145
Aplicații.....	147
9. FIZICA ATOMULUI ȘI MOLECULEI.....	150
9.1. Serii spectrale	150
9.2. Atomul lui Bohr	151
9.3. Experiența Franck–Hertz. Insuficiențele teoriei lui Bohr	154
Aplicații.....	155
9.4. Atomul hidrogenoid	157
9.5. Atomii alcalini	158
9.6. Momentul magnetic orbital al electronului	159
9.7. Momentul cinetic propriu al electronului.....	162
9.8. Momentul vectorial al atomului	163
9.9. Structura fină a liniilor spectrale.....	166
Aplicații.....	167
9.10. Emisia și absorbția radiației.....	169
9.11. Radiația Röntgen.....	173
Aplicații.....	174
10. FIZICA SOLIDULUI.....	176
10.1. Defecte în rețea	179
Aplicații.....	183
10.2. Clasificarea solidelor în metale, semiconductori și izolatori.....	184
Aplicații.....	187

11. FIZICA NUCLEULUI ATOMIC.....	189
11.1. Energia de legătură a nucleului. Forțe nucleare	189
11.2. Spinul nuclear.....	191
11.3. Modele nucleare	191
11.4. Radioactivitatea. Legile emisiei nucleare	193
Aplicații	194
11.5. Interacțiunea radiațiilor nucleare cu substanța.....	194
11.6. Reacții nucleare	196
Aplicații	200
TEST DE AUTOEVALUARE IV	202
SOLUȚIILE TESTELOR DE EVALUARE	203
BIBLIOGRAFIE	204

MODULUL I

OBIECTIVELE MODULULUI I

- Cunoașterea legilor mișcării corpurilor considerate ca: puncte materiale sau sisteme de puncte materiale în funcție de problema studiată.
- Funcțiile și ecuațiile Lagrange și Hamilton, care duc la o mai completă cunoaștere a mișcării sistemului mecanic.
- Definirea unor mărimi fizice astfel ca legile să rămână invariante în orice sistem de referință inerțial.
- Compararea fluidelor ideale, luate ca model, cu cele reale.

CONȚINUTUL MODULULUI I

1. PRINCIPIILE MECANICII CLASICE	14
1.1. Legile mecanicii pentru punctul material.....	14
1.2. Câmp de forțe	33
1.3. Legile mecanicii pentru sisteme de puncte materiale	36
Aplicații.....	39
2. PRINCIPIILE MECANICII ANALITICE.....	41
2.1. Ecuațiile Lagrange	41
2.2. Ecuațiile Hamilton	42
2.3. Mișcarea oscilatorie armonică.....	43
Aplicații.....	45
3. ELEMENTE DE TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE	51
3.1. Transformările Lorenz-Einstein.....	51
3.2. Consecințe ale transformărilor Lorentz-Einstein.....	54
3.3. Dinamica relativistă	56
Aplicații.....	58
4. FIZICA FLUIDELOR.....	61
4.1. Statica fluidelor.....	61
4.2. Dinamica fluidelor reale.....	62
4.3. Teoria cinetico-moleculară a gazelor.....	63
Aplicații.....	67
TEST DE AUTOEVALUARE I.....	68

BIBLOGRAFIE

1. Irimiciuc N. – *Mecanica E.D.P.*, București, 1965
2. Liana Șandru, *Fizica*, E.D.P., București, 1994.
3. Liana Șandru, *Fizica*, Ed. U.P.G., Ploiești, 2005

MODULUL I. FIZICA CLASICĂ

1. PRINCIPIILE MECANICII CLASICE

1.1. Legile mecanicii pentru punctul material

Punctul material este modelul fizic creat pentru un corp al cărui dimensiuni și formă pot fi neglijate, în anumite condiții, astfel încât poate fi asimilat cu un punct geometric, în care este concentrată întreaga sa masă.

Poziția unui punct material (fig. 1.1) este determinată de vectorul de poziție \vec{r} ce unește originea sistemului de coordonate cu punctul material considerat și ale cărui componente sunt determinate de coordonatele carteziane x, y, z adică:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} . \quad (1.1)$$

Viteza unui punct material este dată de vectorul \vec{v} (este orientat după tangenta la traiectoria punctului material) definit prin relația:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} . \quad (1.2)$$

Accelerația unui punct material este dată de expresia vectorială:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} . \quad (1.3)$$

Este situată în planul oscilator al traiectoriei și îndreptată spre interiorul concavității traiectoriei. În general vectorul accelerației nu este tangent la traiectorie (exceptând cazul mișcării rectilinii).

Legea inerției. Un punct material rămâne în starea de repaus sau de mișcare uniformă și rectilie (accelerație nulă) dacă asupra sa nu acționează nici o forță, adică $\vec{a} = 0$ când $\vec{F} = 0$.

Legea fundamentală a dinamicii. Viteza de variație a impulsului unui punct material este proporțională cu forța ce acționează asupra corpului.

Definim impulsul ca $m\vec{v}$, unde m este masa și v este vectorul viteză.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} . \quad (1.4)$$

În S.I. masa m se măsoară în kg, accelerația \vec{a} în m/s^2 , iar forța \vec{F} în N . Un newton este forța care acționând asupra unui corp cu masa de un kilogram îi imprimă o accelerație de 1m/s^2 .

Principiul acțiunii și reacțiunii. Ori de câte ori interacționează două corpuri, forța \vec{F}_{21} pe care corpul 1 o exercită asupra corpului 2 este egală și de sens contrar cu forța \vec{F}_{12} pe care corpul 2 o exercită asupra corpului 1, adică:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.5)$$

Principiul suprapunerii forțelor. Dacă mai multe forțe acționează în același timp asupra unui punct material, fiecare forță produce propria sa accelerație, în mod independent de prezența celorlalte forțe, forța rezultantă fiind suma vectorială a forțelor individuale

Această lege rezultă din ecuația (1.4): dacă forța rezultantă F este nulă, atunci $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, adică impulsul punctului material rămâne constant în timp.

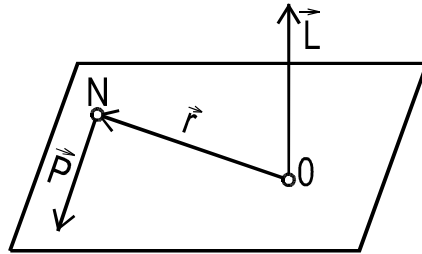


Figura 1.1

Această lege se referă la momentul cinetic al unui punct material N (fig. 1.1), în raport cu un punct fix O (centru). Prin definiție, momentul cinetic este mărimea fizică vectorială

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (1.6)$$

unde r este vectorul de poziție al punctului material față de centrul O . Dacă asupra punctului material acționează forța rezultantă F , atunci momentul forței, în raport cu punctul O , este dat de relația:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (1.7)$$

unde M depinde de alegerea punctului O . Derivând expresia (1.10), în raport cu timpul, se obține:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (1.8)$$

Deoarece în relația (1.11)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0 + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt},$$

se obține expresia:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}. \quad (1.9)$$

Momentul cinetic rămâne constant în timp dacă momentul forței rezultante M este nul, deoarece $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.

Legea de conservare a momentului cinetic este valabilă atât pentru mișcarea pe o traiectorie închisă, cât și pentru traiectorii deschise și procese de ciocniri între particule.

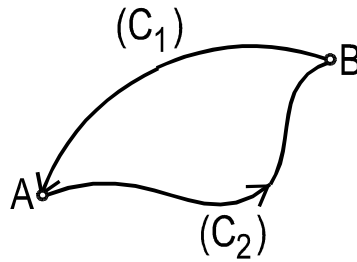


Figura 1.2

Forțe conservative. În cazul în care lucrul mecanic efectuat de o forță între două puncte, nu depinde de curba pe care se deplasează punctul său de aplicație, forța se numește conservativă. Astfel de forțe sunt deci caracterizate prin condiția:

$$\int_{A^{(C_1)}}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A^{(C_2)}}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (1.10)$$

unde (C_1) și (C_2) sunt două curbe ce unesc punctele A și B (fig. 1.2).

Din relația (1.10) rezultă că lucrul mecanic efectuat de o forță conservativă pe un contur închis (C) este nul:

$$\oint_{(C)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (1.11)$$

Folosind teorema lui Stokes, relația (1.10) se poate scrie sub forma

$$\oint_{(C)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{(S)} (\nabla \times \vec{F}) d\vec{S} = 0, \quad (1.12)$$

unde S este o suprafață arbitrară mărginită de curba (C) .

$$\nabla \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.13)$$

Suprafața S fiind arbitrară, din relația (1.11) rezultă

$$\nabla \times \vec{F} = 0. \quad (1.14)$$

Forțele sunt neconservative dacă lucrul mecanic al acestor forțe, între două puncte, depinde de curba pe care se deplasează punctul lor de aplicație. Un exemplu de forțe neconservative sunt forțele de frecare. Astfel în cazul mișcării cu frecare a unui corp o parte din energia cinetică a acestuia se transformă în căldură. Datorită acestui fapt legea conservării energiei mecanice nu este îndeplinită.

Energia cinetică este o mărime care caracterizează starea de mișcare a unui punct material. Deoarece:

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = \vec{v} dt \quad \text{iar} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

lucrul mecanic elementar (1.14) se poate scrie sub forma:

$$dL = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt = d(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \quad (1.15)$$

Mărima $mv^2/2$ se numește energie cinetică a punctului material și se notează prin T . Expresia:

$$dL = dT, \quad (1.16)$$

reprezintă legea variației energiei cinetice sub formă locală (sau diferențială).

Prin integrare între punctele A și B se obține forma sa globală (sau integrală):

$$L_{(A \rightarrow B)} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (1.17)$$

Lucrul mecanic efectuat de forța F între punctele A și B este egal cu variația energiei cinetice a punctului material între aceleași puncte. Relația (1.14) sugerează posibilitatea definirii unei funcții $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$, astfel încât forța F să derive din gradientul acestei funcții:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k}\right). \quad (1.18)$$

Deoarece rotorul unui gradient este întotdeauna nul, expresia (1.18) satisface condiția (1.14). Funcția $U(\vec{r})$ astfel definită, se numește energie potențială a punctului material, de vector de poziție \vec{r} . Dacă se folosește expresia (1.18) pentru forța conservativă, atunci lucrul mecanic efectuat de aceasta, între două puncte înfinit vecine este:

$$dL = \vec{F} d\vec{r} = -\nabla U d\vec{r}. \quad (1.19)$$

Având în vedere că:

$$\nabla U d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU,$$

relația (1.19) devine:

$$dL = -dU, \quad (1.20)$$

$$U(\vec{r}) = -\int_A^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -L_{(\infty \rightarrow \vec{r})}. \quad (1.21)$$

Energia potențială a punctului material într-un punct de vector de poziție \vec{r} este egală cu lucrul mecanic, efectuat de forța \vec{F} , luat cu semn schimbat, când punctul material este deplasat din punctul de referință

(punctul de la infinit) în punctul respectiv. În cazul forțelor conservative, prin compararea relațiilor (1.16) și (1.20) se obține:

$$d(T + U) = 0, \quad (1.22)$$

adică $T + U$ const., exprimă legea conservării energiei mecanice.

Aplicații

1.1. Mișcarea unui corp este descrisă de ecuațiile de mișcare $\ddot{x} = kt$, $\ddot{y} = 0$, $\ddot{z} = 0$. Să se calculeze spațiul parcurs de corp când t crește de la 0 la 1s, presupunând că la $t = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 1$ m/s. Se cunoaște $k = 6$ m/s².

Rezolvare:

$$x = x_0 + \frac{1}{6}kt^3 \quad y = y_0 + \dot{y}_0 t \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t$$

Spațiul S în funcție de timp:

$$S(t) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = \sqrt{\frac{k^2 t^6}{36} + (y_0^2 + z_0^2)t^2}.$$

Pentru $\dot{x} = 0$, $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 1$ m/s și $k = 6$ m/s² $\Rightarrow S = 1,73$ m.

1.2. Un punct material se mișcă după legea $s = A^n v^n - B^n$, unde A, B sunt constante reale pozitive, iar n număr natural, cu condițiile inițiale, $t = 0, v = v_0$, respectiv $s = 0$. Să se determine după ce interval de timp, viteza devine $kv_0, k > 1$.

Rezolvare:

Din condițiile inițiale:

$$v_0 = \frac{B}{A}$$

Se diferențiază legea spațiului și se obține:

$$ds = v dt = nA^n v^{n-1} dt$$

Prin integrare:

$$\int_0^t dt = nA^n \int_{v_0}^v v^{n-2} dv$$

$$t = \frac{nA^n}{n-1} (v^{n-1} - v_0^{n-1})$$

După intervalul de timp τ de la începutul mișcării, viteza PM devine kv_0 .

$$\tau = \frac{nA^n}{n-1} (k^{n-1} v_0^{n-1} - v_0^{n-1})$$

$$\tau = \frac{nA^n}{n-1} v_0^{n-1} (k^{n-1} - 1)$$

$$\tau = \frac{nAB^{n-1}}{n-1} (k^{n-1} - 1).$$

1.3. Mișcarea unui punct material este descrisă de ecuațiile parametrice $x = 4e^t + 1$, respectiv $y = 3e^t - 1$. Determinați dependența de timp a vitezei și accelerației, precum și traiectoria punctului material.

Rezolvare:

Componentele vitezei sunt:

$$v_x = \dot{x} = 4e^t, v_y = \dot{y} = 3e^t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5e^t \text{ m/s}.$$

Componentele accelerației sunt:

$$a_x = \ddot{x} = 4e^t, a_y = \ddot{y} = 3e^t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5e^t \text{ m/s}^2.$$

Pentru determinarea traiectoriei se elimină timpul între cele două ecuații parametrice de mișcare și se obține:

$$y = \frac{1}{4}(3x - 7),$$

care este ecuația unei semidrepte ce pornește din punctul (5,2) și are panta $\frac{3}{4}$.

1.4. Ecuațiile parametrice de mișcare ale unui punct material sunt:

$$x(t) = A \sin kt$$

$$y(t) = B(1 - \sin kt)$$

Descrieți mișcarea punctului material.

Rezolvare:

Se elimină timpul între cele două ecuații parametrice de mișcare și se obține:

$$y = B\left(1 - \frac{x}{A}\right),$$

care este ecuația unui segment de dreaptă cu $|x| \leq A$.

Punctul material va executa o mișcare oscilatorie de-a lungul acestui segment de dreaptă. Se diferențiază ecuațiile parametrice de mișcare și se obține:

$$dx = kA \cos kt \cdot dt$$

$$dy = -kB \cos kt \cdot dt$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = k\sqrt{A^2 + B^2} \cos kt \cdot dt$$

$$s = \sqrt{A^2 + B^2} \sin kt + C$$

Pentru determinarea constantei de integrare se folosesc condițiile inițiale. Se presupune că la momentul inițial, $t_0 = 0 \rightarrow s = 0$ și se obține $C = 0$.

$$s = \sqrt{A^2 + B^2} \sin kt,$$

ce descrie mișcarea oscilatorie a PM, ce pornește din origine.

1.5. Un punct material aruncat cu viteza v_0 sub unghiul α cu orizontala întâmpină din partea aerului o accelerație $\vec{a} = -k\vec{v}$; k fiind o constantă de proporționalitate. Ecuațiile parametrice de mișcare sunt:

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k \cdot g} (1 - e^{-k \cdot g \cdot t})$$

$$y = \frac{1}{k \cdot g} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k} \right) (1 - e^{-k \cdot g \cdot t}) - \frac{1}{k}$$

Să se determine:

- ecuația traiectoriei;
- spațiul parcurs de punctul material pe orizontală;
- înălțimea maximă la care s-a ridicat punctul material.

Rezolvare:

a) Se elimină timpul între cele două ecuații parametrice de mișcare și se obține ecuația traiectoriei:

$$y(x) = \frac{1 + kv_0 \sin \alpha}{kv_0 \cos \alpha} x + \frac{1}{k^2 g} \ln \left(1 - \frac{k \cdot g}{v_0 \cos \alpha} x \right)$$

b) Se impune $y(x) = 0$ și se obține $x_1 = 0$,

$$0 = \frac{1 + kv_0 \sin \alpha}{kv_0 \cos \alpha} x_2 + \frac{1}{k^2 g} \ln \left(1 - \frac{k \cdot g}{v_0 \cos \alpha} x_2 \right),$$

ecuație algebrică care prin rezolvare furnizează coordonata x_2 ce reprezintă chiar valoarea spațiului parcurs de PM pe orizontală.

c) Punctul material va urca până când:

$$v_y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$$

$$t_{\min} = \frac{1}{k \cdot g} \ln(1 + kv_0 \sin \alpha) \rightarrow$$

$$y_{\min} = \frac{v_0 \sin \alpha}{k \cdot g} - \frac{1}{k^2 g} \ln(1 + kv_0 \sin \alpha)$$

1.6. O particulă de masă m se mișcă în planul xOz , având vectorul de poziție $\vec{r} = a \cos \omega t \cdot \vec{i} + b \sin \omega t \cdot \vec{j}$, unde a , b și ω sunt constante pozitive și $a > b$.

a) Să se arate că particula se mișcă pe o elipsă;

b) Să se arate că forța care acționează asupra particulei este orientată spre origine;

c) Să se scrie expresia energiei cinetice a particulei în punctele de intersecție ale elipsei cu semidreptele Ox și Oy ;

d) Să se arate că lucrul mecanic efectuat asupra particulei în timpul unei rotații complete a acesteia pe elipsă este nul.

Rezolvare:

$$a) \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = a \cdot \cos \omega t \cdot \vec{i} + b \cdot \sin \omega t \cdot \vec{j};$$

$$x = a \cdot \cos \omega t; \quad y = b \cdot \sin \omega t;$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1;$$

$$b) \vec{F} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2} [a \cos \omega t \cdot \vec{i} + (b \sin \omega t) \cdot \vec{j}] = -m \omega^2 \vec{r};$$

$$c) E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m (\omega^2 a^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 b^2 \cos^2 \omega t).$$

În punctele de intersecție $\omega t = 0$, respectiv $\omega t = \frac{\pi}{2}$.

$$d) L = \int_0^{2\pi/\omega} \vec{F} d\vec{r} = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - b^2) \sin^2 \omega t \Big|_0^{2\pi/\omega} = 0.$$

1.7. Calculați lucrul mecanic efectuat de forța variabilă $F(x) = 8N$, unde x este exprimat în metri, iar F în newtoni, între punctele $A(x_A = 0,2 \text{ m})$ și $B(x_B = 0,5 \text{ m})$.

Rezolvare:

$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} 8x \cdot dx = 4(x_B^2 - x_A^2) = 0,84 \text{ J}.$$

1.8. Corpul cu masa $m = 0,16 \text{ kg}$ se lansează cu viteza v_0 într-un fluid vâscos la care rezistența mecanică este $r = 0,32 \text{ Ns/m}$. Spațiul de oprire este de $3,2 \text{ m}$. Se cere să se calculeze viteza v_0 .

Rezolvare:

Modulul forței de rezistență opuse de fluid la înaintarea corpului este:

$$F_r = rv$$

Legea a doua a dinamicii este:

$$rv = -m \frac{dv}{dt} = -m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = -m \frac{dv}{dx} v$$

Deci:

$$rv = -\frac{dv}{dx}v$$

După separarea de variabile se obține:

$$dx = -\frac{m}{r} dv$$

După integrare:

$$x = -\frac{m}{r}v + C$$

unde: C - constantă de integrare care se găsește cu condițiile inițiale:

$$x_0 = 0, v_0 = 0 \Rightarrow C = \frac{m}{r}v_0$$

Dependența $x = f(v)$ este:

$$x = \frac{m}{r}(v_0 - v)$$

Pentru $x = x_{oprire}$, $v = 0$ (corpul se oprește, deci:

$$v_0 = x_{op} \cdot (r/m) = 6,4 \text{ m/s}$$

1.9. Vectorul de poziție al unei particule cu masa $m = 0,4 \text{ kg}$, care se mișcă în planul orizontal xOy este:

$$\vec{r} = 5 \cos 3t \cdot \vec{i} + 3 \sin 3t \cdot \vec{j} \quad (m)$$

Se cere:

- să se deducă ecuația traiectoriei;
- să se calculeze forța care acționează asupra particulei în punctele de intersecție ale traiectoriei cu axele Ox și Oy;
- să se calculeze energia cinetică a particulei în punctele de intersecție ale traiectoriei cu axele Ox și Oy;
- să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța care acționează asupra particulei în curs de o perioadă.

Rezolvare:

$$a) \quad \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}; \quad x = 5 \cos 3t; \quad y = 3 \sin 3t;$$

$$\cos^2 3t = \frac{x^2}{25}; \quad \sin^2 3t = \frac{y^2}{9};$$

$$\cos^2 3t + \sin^2 3t = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\text{elipsă})$$

$$b) \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = -15 \sin 3t \cdot \vec{i} + 9 \cos 3t \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -45 \cos 3t \cdot \vec{i} - 27 \sin 3t \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a} = -9(5 \cos 3t \cdot \vec{i} + 3 \sin 3t \cdot \vec{j}) = -9\vec{r} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -3,6\vec{r} \quad (\text{forța este centripetă})$$

În punctul de intersecție al traiectoriei cu axa Ox, $\omega t = 0$ iar în punctual de intersecție cu axa Oy, $\omega t = \pi/2$. Acestea implică $\vec{r}_1 = 5 \cdot \vec{i}$; $\vec{r}_2 = 3 \cdot \vec{j}$, respectiv $\vec{F}_1 = -18 \cdot \vec{i}$; $\vec{F}_2 = -10,8 \cdot \vec{j}$.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad v_x &= -15 \sin 3t; \quad v_y = 9 \cos 3t \\ \omega t = 0, v_x &= 0, v_y = 9 \text{ m/s}, \quad E_{c1} = 16,2 \text{ J} \\ \omega t = \pi/2, v_x &= 15 \text{ m/s}, v_y = 0, \quad E_{c2} = 45 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad L &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ d\vec{r} &= (-15 \sin 3t \cdot \vec{i} + 9 \cos 3t \cdot \vec{j}) \cdot dt \end{aligned}$$

Perioada mișcării este:

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi / 3 \quad (s)$$

$$\begin{aligned} L &= -3,6 \int_0^{2\pi/3} (5 \cos 3t \cdot \vec{i} + 3 \sin 3t \cdot \vec{j}) \cdot (-15 \sin 3t \cdot \vec{i} + 9 \cos 3t \cdot \vec{j}) dt \\ L &= 172,8 \int_0^{2\pi/3} \sin 3t \cos 3t \cdot dt = 0 \end{aligned}$$

1.10. Pe o pistă față de care $\mu = 0,4$, un atlet fuge pe durata $t = 3s$ și sare în lungime. Înălțimea maximă pe care o poate atinge față de centrul său de greutate este $h = 0,50 \text{ m}$. Să se calculeze lungimea maximă posibilă a săriturii neglijând frecarea cu aerul ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Rezolvare:

Pentru a sări în lungime, viteza sportivului trebuie să aibă două componente: v_x pe orizontală, care să-l ducă înainte și v_y pe verticală care să-i asigure timpul de zbor $t_s = 2v_y / g$ iar $v_y = \sqrt{2gh}$. Pe durata t_1 în care fuge pe orizontală pentru a atinge viteza v_x , asupra atletului acționează forța de frecare, μmg . Pe durata t_2 , ($t_2 = t - t_1$) în care se opintește ca să facă săritura, asupra sa acționează forța normală \vec{N} . Legea conservării impulsului pe axele Ox și Oy conduce la relațiile:

$$\begin{aligned} \mu mg t_1 + \mu N t_2 &= m v_x \\ (N - mg) t_2 &= m v_y \end{aligned}$$

Din aceste relații și din expresiile:

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2, \\ v_y &= \sqrt{2gh}, \end{aligned}$$

se obține viteza de avans:

$$v_x = \mu(\sqrt{2gh} + gt).$$

Lungimea săriturii este:

$$x = v_x \cdot t_s, \text{ unde } t_s = 2\sqrt{2h/g}.$$

Înlocuim expresiile pentru v_x și t_s și obținem:

$$x = 2\mu\sqrt{2h/g} \cdot (\sqrt{2gh} + gt), \quad x = 8,4 \text{ m}.$$

1.11. O sanie de masă $M_0 = 24 \text{ kg}$ se poate mișca pe o suprafață orizontală, fără frecări, $\mu = 0$. Pe masă se află un sac cu nisip, $m = 4 \text{ kg}$. La

momentul inițial $t_0 = 0$, asupra saniei își începe acțiunea o forță $F = 12N$, iar nisipul începe să curgă din sac cu debitul $q_0 = 250g/s$. Să se afle viteza saniei când nisipul s-a scurs din sac.

Rezolvare:

$$M(t) = (M_0 + m) - q_0 t = M_i - q_0 t$$

Durata curgerii nisipului este:

$$t = m / m_0 = 16s$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{M_i - q_0 t}$$

$$dv = \frac{F}{M_i - q_0 t} \cdot dt$$

Prin integrare:

$$v = \frac{F}{q_0} \ln(M_i - q_0 t) + C$$

Introducând condițiile inițiale în ecuație:

$$C = \frac{F}{q_0} \ln M_i$$

Rezultă:

$$v = \frac{F}{q_0} \ln \frac{M_i}{M_i - q_0 t}$$

Pentru $t = 16s$, $v = 7,4 m/s$.

1.12. Un vagon se poate mișca pe o suprafață orizontală cu frecare, $\mu = 0,3$. În vagon la celălalt capăt se găsește un tun care la momentul inițial ($t_0 = 0; v_0 = 0$) se trage un proiectil care se lipește de peretele opus al vagonului. Aflați distanțele parcurse de vagon până la oprirea sa considerând următoarele secvențe ale mișcării:

a) de la lansarea proiectilului până la ciocnirea plastică a acestuia cu peretele opus al vagonului;

b) de la ciocnirea plastică a proiectilului cu peretele până la oprirea vagonului. Se cunosc: masa vagonului și a tunului $M = 3t$, masa proiectilului $m = 120kg$, durata tragerii $\Delta t = 0,1s$, viteza proiectilului față de sol $v_2 = 120m/s$, lungimea vagonului $l = 120m$, durata ciocnirii perete proiectil $\Delta t' = \Delta t = 0,1s$.

Rezolvare:

Teorema de variație a impulsului la lansarea proiectilului:

$$Mv_1 = mv_2 - \mu Mg \cdot \Delta t$$

$$v_1 = 4,5m/s$$

Timpul în care proiectilul ajunge la capătul opus al vagonului:

$$t_1 = \frac{l}{v_1 + v_2}; \quad t_1 = 0,96s$$

Teorema de variație a impulsului la ciocnirea proiectil-perete:

$$mv_2 - M(v_1 - \mu g t_1) - \mu M g \cdot \Delta t = (M + m)v_3$$

$$v_3 = 2,76m/s$$

Distanțele parcurse de vagon până la oprire sunt:

$$s_1 = v_1 t_1 - \frac{1}{2} \mu g t_1^2; \quad s_1 = 2,04m$$

$$s_2 = \frac{v_3^2}{2\mu g}; \quad s_2 = 1,44m$$

1.13. De la suprafața pământului, la $t_0 = 0$, se lansează pe verticală corpul cu masa $m = 3kg$ și viteza $v_0 = 50m/s$. Forța de rezistență cu care aerul se opune mișcării este proporțională cu viteza și opusă acesteia. Coeficientul rezistenței mecanice a aerului este $r = 0,03$. Să se afle:

- a) ecuația vitezei;
- b) timpul de urcare;
- c) ecuația spațiului.

Rezolvare:

a) Ecuația fundamentală a dinamicii:

$$m\vec{g} + r\vec{v} = m\vec{a}; \quad a = d\vec{v}/dt;$$

În proiecție pe axa Oy:

$$-mg - rv = m \frac{dv}{dt}$$

Separ variabilele:

$$dt = -m \frac{dv}{mg + rv}$$

Integrăm:

$$t = -\frac{m}{r} \ln(mg + rv) + C$$

Constanta de integrare se află înlocuind condițiile inițiale în relația precedentă:

$$C = \frac{m}{r} \ln(mg + rv_0)$$

Introducând constanta C în ecuația timpului:

$$t = \frac{m}{r} \ln \frac{mg + rv_0}{mg + rv};$$

$$\frac{mg + rv}{mg + rv_0} = e^{\frac{r}{m}t}$$

Deoarece $r/m = 0,01 \ll 1$, se face aproximarea $e^{-(r/m)t} \cong 1 - \frac{r}{m}t$, înlocuind în relația precedentă, obținem ecuația vitezei:

$$v = v_0 - gt - \frac{rv_0 t}{m}$$

$$v = 50 - 10,5t$$

b) Pentru $v = 0$ (oprire), din relația vitezei se obține:

$$t_u = 4,76s$$

$$c) \quad y = \int v \cdot dt = v_0 t - g \frac{t^2}{2} - \frac{rv_0 t^2}{2m} + C$$

cu condițiile inițiale $y_0 = 0; t_0 = 0$ se obține $C = 0$.

$$y = 50t - 5,25t^2$$

Pentru $t = t_u$ se obține înălțimea maximă la care urcă corpul:

$$y_{\max} = 119m$$

1.14. Masa inițială a unei rachete și a combustibilului este $M_0 = 2t$. La momentul inițial, racheta pornește din repaus, din originea axei Ox, în lungul acestei axe. Gazele de ardere sunt ejectate cu debitul $q_0 = 1,12kg/s$ și viteza lor față de rachetă este mereu aceeași, $u = 2000m/s$. La momentul $t = 150s$ racheta lansează un proiectil în sensul său de mers, prin destinderea unui resort. Masa proiectilului este $m = 12kg$ iar energia eliberată de resort prin destindere este $\Delta E = 10MJ$. Frecările sunt neglijabile.

Aflați viteza proiectilului și a rachetei după lansarea acestuia.

Rezolvare:

La un moment dat, masa rachetei este:

$$M = M_0 - q_0 t$$

Legea de variație a impulsului:

$$Mv = (M - dM)(v + dv) + (v - u)dM$$

Neglijând termenii de forma $dM \cdot dv$, ce se obțin prin prelucrarea relației anterioare:

$$M \cdot dv = u \cdot dM, \text{ adică: } dv = (u \cdot dM) / M$$

Deci:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_0 u}{M_0 - q_0 t}$$

Înlocuind în expresia lui dv pe $dM = q_0 dt$ și integrând obținem viteza rachetei față de sol:

$$v = u \cdot \ln \frac{M_0}{M_0 - q_0 t}; \quad v = 175,5m/s$$

Legile de conservare ale impulsului și energiei mecanice la lansarea proiectilului sunt:

$$(M' + m)v = M'v_1 + mv_2$$

$$\frac{1}{2}(M' + m)v^2 + \Delta E = \frac{1}{2}M'v_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2;$$

Unde masa rachetei și a proiectilului la momentul t :

$$M' + m = M_0 - q_0 t = 1832 \text{ kg}$$

Dacă se rezolvă sistemul de ecuații, se găsesc vitezele $v_{1(rachet)}$ și $v_{2(proiectil)}$:

$$v_1 = v - \sqrt{\frac{2m\Delta E}{M'(M' + m)}}; \quad v_1 = 167,1 \text{ m/s.}$$

$$v_2 = v + \sqrt{\frac{2M'\Delta E}{m(M' + m)}}; \quad v_2 = 1462,3 \text{ m/s.}$$

1.15. Dacă se dublează impulsul unui punct material, ce se poate spune despre energia lui cinetică?

Rezolvare:

Considerând un PM cu masa m_0 , care se deplasează cu viteza \vec{v}_0 și notând impulsul acestui PM cu $\vec{p}_0 \rightarrow$

$$\vec{p}_0 = m_0 \cdot \vec{v}_0.$$

Energia cinetică se poate exprima în funcție de impulsul PM și are forma:

$$\varepsilon_{c0} = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{p_0^2}{2m_0}.$$

Dublarea impulsului se poate face prin dublarea masei, respective prin dublarea vitezei:

- dublând masa, impulsul PM devine $p = 2p_0$, iar energia cinetică:

$$\varepsilon_c = \frac{4p_0^2}{2 \cdot 2m_0} = 2 \frac{p_0^2}{2m_0} = 2 \cdot \varepsilon_{c0},$$

- dublând viteza, impulsul PM devine $p = 2p_0$, iar energia cinetică:

$$\varepsilon_c = \frac{4p_0^2}{2m_0} = 4 \frac{p_0^2}{2m_0} = 4 \cdot \varepsilon_{c0}.$$

1.16. O bilă de masă m este suspendată de un fir de lungime $L=1,05 \text{ m}$. I se imprimă bilei o viteză orizontală $v_0 = 6 \text{ m/s}$. Să se determine la ce înălțime va slăbi întinderea firului și bila nu se va mai mișca pe cerc. Ce viteză are bila în acel moment? Se consideră $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rezolvare:

Bila va descrie o traiectorie circulară atâta timp cât componenta greutateii în lungul firului de legătură, fir ce determină și raza traiectoriei, este egală cu forța centrifugă:

$$G \cos \alpha = \frac{mv^2}{L}.$$

Făcând uz și de conservarea energiei se poate scrie sistemul de ecuații algebrice:

$$mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{L}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgL(1 + \cos \alpha) + \frac{mv^2}{2}$$

Firul va slăbi când bila va ajunge la înălțimea:

$$h = L(1 + \cos \alpha) = \frac{v_0^2 + gL}{3g} = 1,9m.$$

Viteza bilei la această înălțime este:

$$v = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gL}{3}} = 2,24m/s.$$

1.17. Un corp de masă $m = 0,1$ kg este legat de tavanul unei încăperi cu înălțimea $H = 2,5m$, printr-un fir inextensibil de lungime $L = 1m$. Se scoate pendulul astfel format din poziția de echilibru, astfel încât firul să facă unghiul $\alpha = \frac{\pi}{6}$ cu poziția de echilibru. În această poziție se imprimă corpului de masă m o viteză orizontală v_0 , în direcția perpendiculară pe fir. Să se determine:

- ce valoare are viteza imprimată corpului pentru ca unghiul α să rămână constant;
- energia necesară pentru aducerea corpului din starea de echilibru în această stare de mișcare;
- în cât timp și cu ce viteză atinge corpul podeaua dacă la un moment dat se rupe firul ($g = 9,8m/s^2$).

Rezolvare:

În această problemă se discută despre obținerea unui pendul conic dintr-un pendul gravitațional.

a) Pendulului gravitațional adus la unghiul α cu verticala locului, i se imprimă viteza orizontală v . Asupra corpului de masă m acționează forța de greutate $m\vec{g}$, orientată vertical și forța centrifugă $\frac{m\vec{v}^2}{L}$, orientată orizontal, rezultanta fiind orientată în lungul firului. Firul face cu verticala unghiul α de tangentă:

$$\tan \alpha = \frac{mv_0^2}{Lmg},$$

relație din care se obține viteza imprimată corpului :

$$v_0 = \sqrt{Lg \cdot \tan \alpha} = 2,38m/s.$$

b) Se consideră că în starea de echilibru, energia sistemului, doar de natură potențială gravitațională, este nulă. Energia necesară pentru a aduce sistemul din starea de echilibru în starea de mișcare este:

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_p = \frac{mv_0^2}{2} + mgL(1 - \cos \alpha) = 0,415J.$$

c) În starea (a) este prezentată starea sistemului în momentul ruperii firului, iar în (b) este prezentată o vedere laterală a momentului ruperii firului și a evoluției ulterioare a corpului de masă m.

Timpul de cădere se obține din relația:

$$H - L \cos \alpha = g \frac{t_c^2}{2} \rightarrow t_c = 0,36s.$$

Viteza în momentul atingerii solului este:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t_c^2} = 4,25m/s.$$

1.18. Un vagon de masă M, în repaus, conține cantitatea de nisip de masă m. Se aplică o forță orizontală constantă \vec{F} asupra vagonului și în momentul aplicării forței se deschide un orificiu de pe fundul vagonului, pe unde curge nisipul cu rata dm/dt . Să se determine viteza vagonului în momentul în care s-a scurs tot nisipul.

Rezolvare:

Considerăm momentele t și $t + dt$ pentru care se scrie impulsul PM:

$$p = [M + m(t)]v$$

$$p + dp = [M + m(t)](v + dv)$$

Se scade prima ecuație din a doua și se obține:

$$dp = [M + m(t)]dv.$$

Pe de altă parte:

$$dp = Fdt.$$

Se notează viteza de variație a masei cu timpul cu $\alpha \rightarrow$

$$\alpha = -\frac{dm}{dt} \rightarrow m(t) = m - \alpha \cdot t$$

și se obține ecuația:

$$dv = \frac{Fdt}{M + m - \alpha \cdot t},$$

ce prin integrare, furnizează viteza vagonului în momentul scurgerii întregii cantități de nisip:

$$v = \frac{F}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{m}{M} \right).$$

1.19. O barcă de masă m, cu motor, se deplasează rectiliniu cu viteza v_0 pe suprafața unui lac. La un moment dat se oprește motorul bărcii.

a) Să se determine legea vitezei bărcii dacă rezistența pe care o opune apa la înaintarea bărcii este proporțională cu pătratul vitezei.

b) Cât va dura mișcarea bărcii?

c) Ce spațiu străbate barca până se oprește?

d) Verificați dacă se respectă teorema conservării energiei cinetice.

Rezolvare:

a) Barca are mișcare unidimensională (în lungul axei Ox) , iar forța de frecare întâmpinată după oprirea motorului este $-k\dot{x}^2$. Forma diferențială a legii de mișcare este:

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}^2,$$

sau:

$$m\dot{v} = -kv^2,$$

obținându-se o ecuație diferențială care se rezolvă prin integrare, după ce se separă variabilele:

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m} dt$$

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{k}{m} dt$$

b) Din dependența de timp a vitezei se observă că aceasta se anulează după un interval de timp infinit, $t \rightarrow \infty$; $v = 0$, adică barca chiar după oprirea motorului, nu se mai oprește. Acest rezultat neverosimil provine din ipoteza asupra dependenței de pătratul vitezei a forței de frecare la înaintare, ipoteză pe care calculele o dovedesc a fi incorectă.

c) Se notează cu τ intervalul temporal după care barca se oprește ($\tau - \text{finit}$).

$$s = \int_0^\tau v(t) dt = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{m} \tau \right)$$

d)
$$dL = F dx = -k \cdot v^2 \cdot v \cdot dt = -k \cdot v^3 \cdot dt$$

$$L = -\int_0^\infty kv^3 dt = -\frac{1}{2}mv_0^2,$$

egalitate ce reflectă teorema conservării energiei cinetice.

1.20. Energia potențială a unui punct material în camp central este:

a) $U(r) = \frac{\alpha}{r}$

b) $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$

unde r este modulul vectorului de poziție al particulei, α și k sunt constante reale positive. Să se determine forța ce acționează asupra punctului material când acesta trece din poziția $P_1(1,2,3)$ în poziția $P_2(2,3,4)$.

Rezolvare:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U = U(r) = U(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \frac{dU}{dr}$$

$$\vec{F} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} \vec{e}_i = -\frac{dU}{dr} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{r} \vec{e}_i = -\frac{dU}{dr} \vec{e}_r$$

$$L = -\int_{r_1}^{r_2} dU = -\Delta U$$

a) $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^3} \vec{r}$ (N) - forță de tip gravitațional, coulombian.

$$L = -\alpha \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) (J).$$

b) $\vec{F} = -k\vec{r}$ (N) - forță de tip elastic.

$$L = -\frac{1}{2} k (r_2^2 - r_1^2) (J).$$

1.21. Energia potențială de interacțiune ε_p , dintre doi nucleoni se poate exprima suficient de precis prin relația:

$$\varepsilon_p = -\varepsilon_{p0} \left(\frac{r_0}{r} \right) e^{-\frac{r}{r_0}},$$

unde: $\varepsilon_{p0} = 8 \cdot 10^{-12} J$; $r_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-15} m$, iar r este distanța dintre nucleoni.

- a) Să se determine expresia forței de interacțiune dintre nucleoni.
b) Să se calculeze valoarea acestei forțe pentru $r = r_0$.

Rezolvare:

$$a) \vec{F}(r) = -\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} \vec{e}_r = \frac{\varepsilon_{p0}}{r^2} \left(1 + \frac{r_0}{r} \right) e^{-\frac{r}{r_0}} \vec{e}_r$$

$$b) F(r_0) = 2 \frac{\varepsilon_{p0}}{r_0^2} \cong 3,92 kN.$$

1.22. Să se stabilească expresia vitezei cu care se deplasează un corp atunci când asupra lui nu acționează nici o forță, însă masa i se modifică după legea: $m = m_0(1 + \alpha t)^{-1}$.

$$\mathbf{R}: v = v_0(1 + \alpha t)^{-1}.$$

1.23. Mișcarea unui punct material este definită de ecuațiile parametrice: $x = 3t$, $y = 4t - 3t^2$,

unde x și y sunt exprimați în m, iar t în secunde. Să se determine raza de curbură a traiectoriei în momentul când acesta intersectează axa Ox .

R: $R_1 = R_2 = 6,94$ m.

1.24. Două particule a și b se mișcă în direcția Ox , respectiv Oy , cu vitezele $\vec{v}_a = 2\vec{i}$ (m/s), $\vec{v}_b = 2\vec{i}$ (m/s). La $t = 0$ coordonatele lor sunt $(-3; 0)$, respectiv $(0; 3)$.

a) Să se afle vectorul $\vec{r} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$ care reprezintă poziția relativă a particulei b față de particula a la un moment dat.

b) În ce moment și în ce poziție cele două particule se vor afla la aceeași distanță de origine și în ce condiții va fi distanța dintre ele minimă?

R: a) $\vec{r} = (3 - 2t)\vec{i} + (3 - 2t)\vec{j}$;

b) $t = 0$; $x_a = y_b = -3$; $t = \frac{15}{13}$; $x_a = -\frac{9}{13}$; $y_b = \frac{6}{13}$

1.2. Câmp de forțe

Noțiunea de câmp se utilizează în descrierea forțelor ce acționează într-un anumit domeniu. De exemplu se poate defini câmpul gravitațional al unei mase M . Forța cu care acționează această masă asupra unei alte mase m , situată la distanța \vec{r} de ea, este dată de legea atracției universale a lui Newton:

$$\vec{F} = k \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.23)$$

unde k este constanta atracției universale.

Legea se mai poate scrie sub forma:

$$\vec{F} = m\vec{C},$$

unde am notat:

$$\vec{C} = k \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.24)$$

care poartă numele de intensitatea câmpului gravitațional creat de masa M într-un punct situat la distanța r .

Analog se poate defini câmpul electric creat de sarcina Q asupra sarcinii q , situată într-un punct oarecare din jurul sarcinii Q ; mărimea forței de interacțiune dintre cele două sarcini electrice este dată de legea lui Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.25)$$

Această lege poate fi scrisă și sub forma:

$$\vec{F} = q\vec{E}; \quad \vec{E} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.26)$$

unde \vec{E} se numește intensitatea câmpului electric creat de sarcina Q într-un punct situat la distanța r de ea.

Câmpul este o formă de existență a materiei, prin intermediul căruia se realizează diferitele tipuri de interacțiuni dintre corpuri. În fiecare punct din domeniul său de existență câmpul este caracterizat prin anumite mărimi fizice care pot lua valori diferite, în puncte diferite din spațiu. În exemplele de mai sus, aceste mărimi sunt: intensitatea câmpului gravitațional (\vec{C}) și intensitatea câmpului electric (\vec{E}). Fiind mărimi vectoriale, câmpurile respective sunt denumite câmpuri vectoriale. În cazurile în care câmpurile sunt caracterizate de mărimi scalare, sunt denumite câmpuri scalare.

Exemplu: temperatura și presiunea unui gaz.

Câmpul vectorial se reprezintă intuitiv desenând în mai multe puncte din spațiu vectorii intensității câmpului și trasând apoi liniile de câmp care sunt tangente în fiecare punct la vectorii intensității câmpului. Se trasează liniile de câmp mai depărtate, în acele regiuni în care câmpul este slab și apropiate unde câmpul este intens (fig. 1.3).

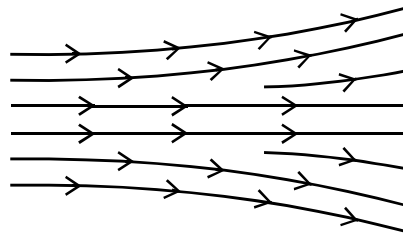


Figura 1.3

Convenția adoptată este ca numărul de linii pe unitatea de arie perpendiculară să fie proporțională cu intensitatea câmpului.

Un câmp este uniform (omogen) dacă în orice punct al lui, vectorul intensitate are aceeași mărime și sens.

Dacă direcția intensității în orice punct al câmpului trece mereu prin același punct (centrul câmpului), iar mărimea lui este funcție de distanța acestui punct față de centrul câmpului, câmpul se numește central.

Câmpurile de forțe se manifestă prin forța cu care ele acționează în fiecare punct asupra unui corp de probă plasat în acel punct.

Câmpul ca și substanța, are energie și orice schimbare a energiei unui obiect trebuie considerată ca un transfer local de energie de la câmp la obiect și invers. Ca urmare, în fiecare moment se îndeplinește legea conservării energiei sub forma sa cea mai generală:

$$W_{(obiect)} + W_{(câmp)} = const.$$

De fiecare dată când lipsesc cauze vizibile care să explice schimbarea energiei unui corp, se introduce noțiunea de câmp chiar de un tip nou și se apelează la legea de mai sus.

Câmpul poate fi caracterizat, în fiecare punct al său, printr-o mărime scalară numită potențial. De exemplu, în cazul câmpului gravitațional, forța care acționează asupra unui punct material de masă m are expresia (1.24).

Energia potențială a acestui punct material, situat într-un punct al câmpului de intensitate \vec{C} , se calculează astfel:

$$U(x, y, z) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{C} \cdot d\vec{r} . \quad (1.27)$$

Potențialul câmpului gravitațional în punctul de coordonate x, y, z este:

$$V(r) = \frac{kM}{r} . \quad (1.28)$$

Analog, potențialul într-un punct al câmpului electric, creat de o sarcină punctiformă, se definește prin relația

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (1.29)$$

Relația dintre forță și energia potențială dă posibilitatea să se stabilească o legătură între intensitatea câmpului și potențialul său: $\vec{C} = -\nabla V$ și analog pentru câmpul electric: $\vec{E} = -\nabla V$.

1.3. Legile mecanicii pentru sisteme de puncte materiale

Rezultatele obținute în cazul punctului material pot fi generalizate la studiul sistemelor formate din mai multe puncte materiale, dar în acest caz trebuie să se deosebească două tipuri de forțe: exterioare și interioare. Forțele care acționează din exterior asupra punctelor materiale ale sistemului considerat, se numesc forțe exterioare. Forțele determinate de acțiunea fiecărui punct material asupra celorlalte puncte materiale din sistem sunt forțele interioare. Se notează cu $\vec{F}_{i(e)}$ forța exterioară care acționează asupra punctului materiei i și cu \vec{F}_{ij} forța cu care punctul material j acționează asupra punctului material i .

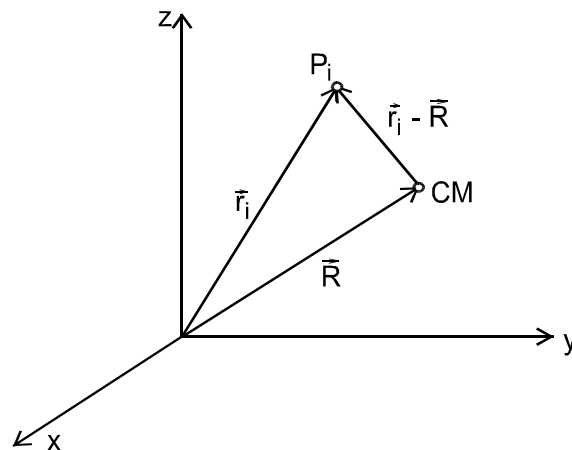


Figura 1.4

Legea a doua a lui Newton pentru fiecare punct material în parte, se scrie sub forma:

$$\vec{F}_{i(e)} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.30)$$

unde n este numărul de puncte materiale din sistem.

Prin însumarea relațiilor (1.30) scrise pentru fiecare punct material în parte și ținând seama că forțele \vec{F}_{ij} se anulează două câte două ($\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$) se obține:

$$\vec{F}_{(e)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i(e)} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right), \quad (1.31)$$

unde $\vec{F}_{(e)}$ reprezintă forța exterioară rezultantă care acționează asupra sistemului de particule.

Poziția \vec{R} a centrului de masă al unui sistem de n particule, în raport cu o origine fixă O , este definită prin:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (1.32)$$

În absența forțelor exterioare, impulsul total al sistemului $\sum_i m_i \vec{v}_i$ este constant. Momentul cinetic total al unui sistem de puncte materiale se definește ca suma momentelor cinetice ale punctelor materiale componente:

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i), \quad (1.33)$$

unde \vec{r}_i și \vec{p}_i reprezintă vectorul de poziție și respectiv, impulsul punctului material i .

Diferența $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ este un vector cu originea în punctul j și vârful în punctul i (fig. 1.5) și deci este paralel cu forța \vec{F}_{ij} care acționează de-a lungul liniei ce unește cele două puncte.

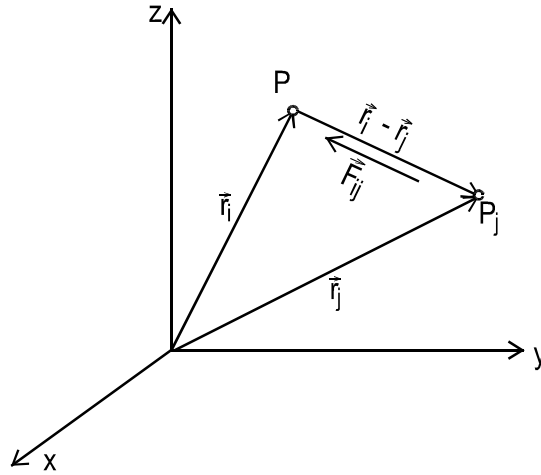


Figura 1.5

Prin urmare

$$\sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0. \quad (1.34)$$

În acest caz, relația devine:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(e)} = \vec{M}_{(e)}, \quad (1.35)$$

unde $\vec{M}_{(e)}$ este momentul rezultat al forțelor exterioare.

În ipoteza că $\vec{M}_{(e)} = 0$, se deduce că $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ și $\vec{L} = \vec{C}$. Astfel momentul cinetic total al sistemului rămâne constant în timp, dacă momentul rezultat al forțelor exterioare, care acționează asupra sistemului este egal cu zero. Legea conservării momentului cinetic total este adevărată numai pentru acele sisteme la care se aplică legea a treia a lui Newton. Aplicând legea a doua a lui Newton pentru fiecare punct material în parte, se obține:

$$dL = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}\right), \quad (1.36)$$

unde:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (1.37)$$

este energia cinetică totală a sistemului de puncte materiale.

Lucrul mecanic elementar dat de relația (1.36) reprezintă variația energiei cinetice a sistemului: $dL = dT$.

$$\sum_i \vec{F}_{i(e)} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{ij} \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i = -dU. \quad (1.38)$$

Lucrul mecanic efectuat de forțele conservative este:

unde:

$$U = \sum_{i=1}^n U_{i(e)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n U_{ij}, \quad (1.39)$$

este energia potențială totală a sistemului. Coeficientul $1/2$ apare deoarece fiecare pereche de indici apare de două ori: o dată la însumarea în raport cu i și o dată în raport cu j . Termenul al doilea din membrul drept al relației (1.39) se numește energie potențială internă a sistemului.

$$dT + dU = 0 \text{ sau } T + U = \text{const.} \quad (1.40)$$

Aplicații

1.25. Să se arate că variația energiei cinetice a punctelor materiale ce se ciocnesc plastic depinde doar de viteza lor relativă înainte de ciocnire și de masele lor.

Rezolvare:

Se consideră că două PM de mase m_1 și m_2 ce se deplasează cu vitezele \vec{v}_1 , respectiv \vec{v}_2 se ciocnesc plastic. Se scrie legea conservării impulsului și se obține:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v} \rightarrow \\ \vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Din bilanțul energiei, pierderea de energie cinetică, în special sub formă de căldură este:

$$-\Delta \mathcal{E}_c = Q = \mathcal{E}_{ci} - \mathcal{E}_{cf} = \\ = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \\ = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{1}{2} \vec{v}_r^2$$

unde masa redusă este:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

respectiv viteza relativă a PM1 față de PM2:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

1.26. Să se verifice dacă impulsul, momentul cinetic total și energia cinetica totală a unui sistem de N puncte materiale de mase m_1, m_2, \dots, m_N și poziții $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ sunt aceleași cu ale unui singur punct material de masă

$M = \sum_{i=1}^N m_i$ și poziția $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ numit centru de inerție al sistemului.

Rezolvare:
$$\vec{p} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) = M \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} \right) = M \vec{V}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}'_i + \vec{R}_1) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_1) = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}'_i) + \vec{R}_1 \times \sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}'_i) + \sum_{i=1}^N \left(m_i \vec{r}'_i \right) \times \vec{v}_1 + \vec{R}_1 \times (M \vec{V}_1)$$

în care:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}_1 \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_1$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{v}_i + \vec{V}_1)^2 = \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{v}_i' \cdot \vec{V}_1 \right) + \frac{M \vec{V}_1^2}{2}$$

Se observă că nu există nici un sistem de referință în care:

$$\vec{L} = \vec{R}_1 \times (M \vec{V}_1) \quad \text{și} \quad T = \frac{M \vec{V}_1^2}{2}.$$

1.27. Două corpuri de masă $m_1 = 10$ kg, respectiv $m_2 = 6$ kg, sunt legate printr-o bară rigidă AB de masă neglijabilă. Inițial sistemul se află în repaus și apoi se acționează simultan asupra celor două corpuri cu două forțe $F_x = 8$ N și $F_y = 6$ N. Poziția inițială a celor două corpuri este: $M_1 (0, 3)$ și $M_2 (1; 0)$. Să se scrie poziția centrului de masă al sistemului în funcție de timp.

$$\mathbf{R}: \vec{R}(t) = \left(\frac{3}{8} + \frac{t^2}{4} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{15}{8} + \frac{3t^2}{16} \right) \cdot \vec{j}.$$

2. PRINCIPIILE MECANICII ANALITICE

Pentru determinarea în spațiu a poziției unui sistem de n puncte materiale, trebuie precizați vectorii de poziție ai punctelor sistemelor.

2.1. Ecuațiile Lagrange

Deoarece mișcarea este descrisă cu ajutorul coordonatelor generalizate q_i , derivatele funcției Lagrange în raport cu vitezele generalizate:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.1)$$

se numesc impulsuri generalizate, iar derivatele în raport cu coordonatele generalizate:

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (2.2)$$

se numesc forțe generalizate. Ecuațiile Lagrange se pot scrie sub forma concisă:

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (2.3)$$

Pentru simplitate se consideră un punct material care se mișcă pe o traiectorie rectilinie în direcția Ox . Pornind de la egalitatea:

$$\vec{F} = \vec{\dot{p}} = -\text{grad}U,$$

se obține:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.4)$$

unde:

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}. \quad (2.5)$$

Înlocuind expresia (2.5) în relația (2.4), rezultă:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right] + \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.6)$$

Folosind expresia, $T - U = L(q, \dot{q}, t)$ ecuația (2.6) devine:

(2.7)

Ținând seama de faptul că $\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = 0$ și $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, ecuația (2.7) devine:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

Generalizând ecuațiile (2.8) se obțin S ecuații de forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, s) \quad (2.9)$$

numite ecuațiile Lagrange.

2.2. Ecuațiile Hamilton

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} (L + U) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (L - U) = 0.$$

Diferențiala totală a funcției Lagrange după coordonate și viteze este:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad (2.10)$$

Deoarece derivatele $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ sunt prin definiție impulsurile generalizate, iar

ecuațiile lui Lagrange dau $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$, se poate scrie expresia (2.10) sub forma:

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i \quad (2.11)$$

Termenul al doilea din relația (2.11) se scrie sub forma:

$$\sum_i p_i \cdot d\dot{q}_i = d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right) - \sum_i \dot{q}_i \cdot dp_i$$

apoi se trece diferențiala totală $d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right)$ în primul membru și se schimbă semnele, obținându-se:

$$d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = - \sum_i \dot{p}_i \cdot dq_i + \sum_i \dot{q}_i \cdot dp_i$$

Mărima de sub semnul diferențială reprezintă energia sistemului exprimată în funcție de coordonate și de impulsuri și se numește funcție Hamilton a sistemului:

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (2.12)$$

Din egalitatea

$$dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i \quad (2.13)$$

în care variabilele independente sunt coordonatele și impulsurile, se obțin ecuațiile Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, S) \quad (2.14)$$

2.3. Mișcarea oscilatorie armonică

Cazul studiat este cel al unui punct material a cărui mișcare se poate descrie cu un singur grad de libertate q .

Un sistem este în echilibru stabil atunci când energia sa potențială $U(q)$ este minimă; o depărtare de la această poziție dă naștere la o forță $-\frac{dU}{dq}$ care tinde să readucă sistemul la punctul său de plecare. Curba energiei potențiale $U(q)$ se poate aproxima printr-o parabolă care are un minim în $q = 0$ (fig. 2.2). Dacă se dezvoltă funcția $U(q)$ în serie Taylor, în jurul punctului $q = 0$, se obține:

$$U(q) = \frac{1}{2} k q^2; \quad k = \left(\frac{d^2 U}{dq^2} \right)_{q=0} = \text{constant}. \quad (2.16)$$

în care s-au neglijat termenii de ordin superior în q . Constanta k depinde de

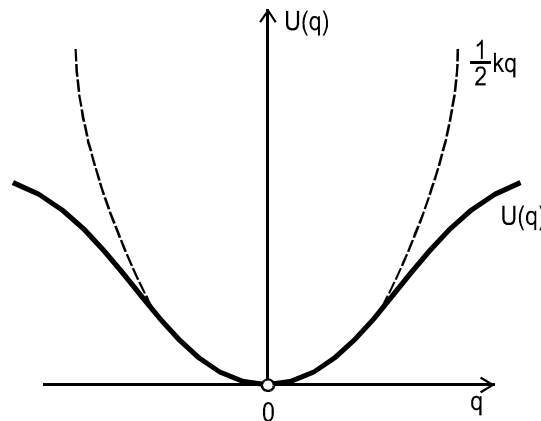


Figura 2.2

natura câmpului de forțe și este denumită constantă elastică.

Funcția Lagrange a unui punct material care execută oscilații liniare în jurul poziției de echilibru, când drept coordonată q se poate alege coordonata carteziană

$$x, \text{ este: } L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \quad (2.17)$$

Ecuția de mișcare a punctului material se obține înlocuind funcția (2.17) în ecuațiile Lagrange (2.9):

$$m\ddot{x} + kx = 0; \quad (2.18)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0; \quad (2.19)$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.20)$$

Ecuția diferențială liniară (2.19) are două soluții independente: $\cos \omega t$ și $\sin \omega t$, de unde soluția sa generală:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (2.21)$$

Această expresie se poate scrie și sub forma:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.22)$$

Conform relațiilor $\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$ și (2.21) se obțin expresiile ce exprimă legătura dintre constantele arbitrare A și constantele C_1 și C_2 :

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{C_2}{C_1} \quad (2.23)$$

Astfel, în vecinătatea poziției sale de echilibru stabil, un sistem efectuează o mișcare oscilatorie armonică. Coeficientul A din fața factorului periodic din relația (2.22) se numește amplitudinea oscilațiilor, iar argumentul cosinusului – faza lor; φ este valoarea inițială a fazei și depinde evident de alegerea originii timpului. Mărimea ω este pulsația sau frecvența unghiulară a oscilațiilor. Pulsația care nu depinde de condițiile inițiale ale mișcării, constituie caracteristica fundamentală a oscilațiilor. Ținând seama

de formula (2.20), ea este complet determinată de proprietățile sistemului mecanic ca atare. Se observă că această proprietate a pulsației este valabilă în ipoteza oscilațiilor mici și dispare când se trece la un grad de aproximație superior. Aceasta înseamnă din punct de vedere matematic că ea este valabilă dacă energia potențială este funcție de pătratul coordonatei. Energia unui sistem care efectuează oscilații mici este:

$$W = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

Prin introducerea expresiei (2.22), se obține:

$$W = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (2.24)$$

Se observă că energia este proporțională cu pătratul amplitudinii oscilațiilor.

Aplicații

2.1. Să se scrie funcțiile lui Lagrange și Hamilton pentru un pendul plan, de masă m_2 și lungime ℓ , al cărui punct de suspensie, de masă m_1 , se deplasează pe o dreaptă orizontală. Câmpul gravitațional se consideră uniform.

Rezolvare:

Coordonatele generalizate sunt: $q_1 = x$; $q_2 = \varphi$. Pozițiile punctelor sunt definite prin coordonatele:

punctul m_1 : $x_1 = x$; $z_1 = 0$;

punctul m_2 : $x_2 = x + \ell \sin \varphi$; $z_2 = \ell \cos \varphi$.

Energia cinetică a sistemului este: $E_c = E_{c1} + E_{c2}$

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\ell^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x} \cdot \dot{\varphi} \cdot \ell \cdot \cos \varphi)$$

Energia potențială este:

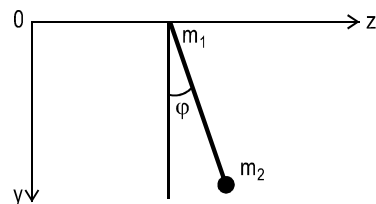


Fig.2.7.

$$E_p = -m_2 g z_2 = -mg \ell \cos \varphi$$

Funcția Lagrange este:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\ell^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x} \cdot \dot{\varphi} \cdot \ell \cdot \cos \varphi) + m_2 g \ell \cdot \cos \varphi$$

Impulsurile conjugate coordonatelor sunt:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 \ell \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 \ell^2 \dot{\varphi} + m_2 \dot{x} \ell \cos \varphi$$

Funcția lui Hamilton va fi:

$$H = E_c + E_p = \frac{p_x^2 \ell^2 m_2 + p_\varphi^2 (m_1 + m_2)}{2m_2 \ell^2 (m_1 + m_2 \sin^2 \varphi)} - \frac{p_\varphi p_x \cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi)}{\ell (m_1 + m_2 \sin^2 \varphi)^2} - m_2 g \ell \cos \varphi$$

2.2. Să se calculeze numărul gradelor de libertate pentru un sistem mecanic constituit din 4 PM între care există 5 legături.

Rezolvare:

Numărul f , al gradelor de libertate este dat de relația:

$$f = 3N - l = 7$$

2.3. Să se scrie funcția Lagrange pentru un pendul dublu ce oscilează în câmp gravitațional terestru uniform, în plan vertical.

Rezolvare:

Fiecare pendul are un grad de libertate: coordonatele generale adecvate sunt unghiurile firelor acestora cu verticala locului α_1 , respectiv α_2 .

Pentru pendulul 1:

$$x_1 = l_1 \sin \alpha_1 \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\alpha}_1 l_1 \cos \alpha_1$$

$$y_1 = l_1 \cos \alpha_1 \rightarrow \dot{y}_1 = -\dot{\alpha}_1 l_1 \sin \alpha_1$$

Pentru pendulul 2:

$$x_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 \rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\alpha}_1 l_1 \cos \alpha_1 + \dot{\alpha}_2 l_2 \cos \alpha_2$$

$$y_2 = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 \rightarrow \dot{y}_2 = -\dot{\alpha}_1 l_1 \sin \alpha_1 - \dot{\alpha}_2 l_2 \sin \alpha_2$$

Considerăm valoarea zero a energiei potențiale în originea sistemului de axe și funcția Lagrange a pendulului dublu este:

$$L = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{c1} + \mathcal{E}_{c2} - \mathcal{E}_{p1} - \mathcal{E}_{p2} = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \alpha_1 + m_2 g l_2 \cos \alpha_2$$

2.4. Considerând funcția Lagrange a unui oscilator liniar armonic,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2,$$

să se determine ecuația diferențială de mișcare a oscilatorului.

Rezolvare:

Cei doi termeni ai ecuației Lagrange pentru oscilatorul armonic considerat sunt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx.$$

de unde obținem ecuația:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

unde notăm raportul:

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

și ecuația capătă forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

care este chiar ecuația diferențială a oscilatorului armonic.

2.5. Funcția Lagrange a unui punct material de masă m în mișcare în câmp gravitațional este:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - km\frac{M}{r^2}.$$

Să se determine expresia accelerației gravitaționale ca funcție de înălțimea h măsurată de la suprafața Pământului. Se cunosc raza Pământului R și valoarea accelerației gravitaționale la suprafața Pământului g_0 .

Rezolvare:

Cei doi termeni ai ecuației Lagrange pentru PM în câmp gravitațional sunt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} = mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = kM \frac{M}{r^2}$$

de unde se obține ecuația:

$$g - k \frac{M}{r^2} = 0$$

care se rescrie sub forma:

$$g = k \frac{M}{(R+h)^2} = k \frac{M}{R^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \cong k \frac{M}{R^2} \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) = g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R}\right)$$

unde se notează:

$$g_0 = k \frac{M}{R^2}$$

2.6. Să se stabilească ecuația de mișcare și perioada micilor oscilații ale unui pendul gravitațional (l,m) utilizând formalismul lagrangean. Se neglijează frecările.

Rezolvare:

Sistemul are un grad de libertate căruia îi asociem coordonata generalizată α . Întrucât sistemul execută doar mișcare oscilatorie în jurul punctului de suspensie, este convenabil să se treacă la coordonate polare:

$$x = l \sin \alpha$$

$$y = l \cos \alpha$$

Funcția Lagrange este:

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}^2 + mgl \cos \alpha$$

de unde se obține ecuația Lagrange:

$$ml^2 \ddot{\alpha} + mgl \sin \alpha = 0$$

Împărțind cu ml^2 se obține:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0,$$

care este o ecuație diferențială dificil de rezolvat. Pentru rezolvarea ei se face ipoteza oscilațiilor mici, care ne permite să aproximăm funcția sinus cu argumentul ei exprimat în radiani $\rightarrow \sin \alpha \approx \alpha$:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0,$$

unde se notează raportul $\frac{g}{l}$ cu ω^2 și ecuația devine:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0,$$

cu soluția generală:

$$\alpha(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

cu A și B constante reale. Pentru determinarea lor se folosesc condițiile inițiale la momentul $t=0$:

$$\alpha = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_M \rightarrow A = \frac{\alpha_M}{\omega}$$

Se obține:

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_M}{\omega} \sin \omega t$$

iar perioada micilor oscilații este dată de relația:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

2.7. De la înălțimea z_0 se aruncă orizontal un punct material cu viteza inițială v_{0x} . Să se determine ecuația de mișcare și traiectoria punctului material utilizând formalismul lagrangean.

Rezolvare:

Funcția Lagrange este:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

unde am considerat energia potențială nulă la suprafața Pământului. Se obțin ecuații diferențiale cu soluțiile generale de mișcare:

$$m\ddot{x} = 0 \rightarrow x(t) = C_1 + C_2 t$$

$$m\ddot{z} = -mg \rightarrow z(t) = C_3 + C_4 - \frac{1}{2}gt^2$$

Pentru determinarea celor patru coeficienți ce apar în soluțiile generale se utilizează condițiile inițiale și se obțin ecuațiile parametrice de mișcare:

$$x(t) = v_{0x}t$$

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Eliminând timpul între cele două ecuații parametrice de mișcare, se obține ecuația traiectoriei:

$$z = z_0 - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2,$$

ecuație ce descrie un arc de parabolă cu vârful în sus.

2.8. Să se scrie funcția Lagrange și ecuațiile Lagrange pentru un pendul gravitațional (l,m) legat cu capătul liber de un punct de masă M, ce se poate deplasa fără frecare pe un suport orizontal în camp gravitațional uniform.

Rezolvare:

Sistemul are două grade de libertate corespunzătoare:

- deplasării pe orizontală, asociindu-se coordonata generalizată x ;
- oscilației în plan vertical în jurul punctului de suspensie antrenat în mișcarea orizontală, asociindu-se coordonata generalizată α .

Pentru cele două corpuri, de masă M și m, se scriu expresiile coordonatelor:

- corpul de masă M; li se asociază coordonatelor indicele 1:

$$x_1 = x \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}$$

$$y_1 = 0 \rightarrow \dot{y}_1 = 0$$

- corpul de masă m; li se asociază coordonatelor indicele 2:

$$x_2 = x + l \sin \alpha \rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x} + \dot{\alpha} \cos \alpha$$

$$y_2 = l \cos \alpha \rightarrow \dot{y}_2 = -\dot{\alpha} l \sin \alpha$$

Funcția Lagrange a sistemului considerat este: (considerându-se $\varepsilon_p = 0$, la nivelul axei Ox).

$$L = \frac{m+M}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} l^2 \dot{\alpha}^2 + ml\dot{x}\dot{\alpha} \cos \alpha + mgl \cos \alpha$$

Pentru coordonata generalizată x , componentele ecuației Lagrange sunt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} [(m+M)\dot{x} + ml\dot{\alpha} \cos \alpha] = (m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\alpha} \cos \alpha - ml\dot{\alpha}^2 \sin \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

iar pentru coordonata generalizată α , componentele ecuației Lagrange sunt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\alpha} + ml\dot{x} \cos \alpha) = ml^2 \ddot{\alpha} + ml\ddot{x} \cos \alpha - ml\dot{\alpha} \cdot \dot{x} \sin \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -ml\dot{\alpha} \cdot \dot{x} \sin \alpha - mgl \sin \alpha$$

Ecuațiile lui Lagrange sunt:

$$(m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\alpha} \cos \alpha - ml\dot{\alpha}^2 \sin \alpha = 0$$

$$ml^2 \ddot{\alpha} + ml\ddot{x} \cos \alpha + mgl \sin \alpha = 0$$

și constituie un sistem de ecuații diferențiale cuplate, dificil de rezolvat

2.9. Să se scrie forma explicită a funcției Lagrange pentru:

- un punct material liber;
- un sistem de puncte materiale libere;
- un sistem de puncte materiale aflate în interacțiune.

Rezolvare:

$$a) L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2; \quad U = 0; \quad L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$b) L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2; \quad L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

$$c) L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_i); \quad L = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N U_{ij} \right]$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N U_{ij}; \quad U_{ij} = U_{ji}$$

2.10. Să se scrie funcțiile Hamilton în coordonate

a) carteziane; b) polare; c) sferice.

Rezolvare:

$$a) H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z)$$

$$b) H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2) + U(r, \theta)$$

$$c) H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\phi^2) + U(r, \theta, \phi)$$

2.11. Să se deducă legea a doua dinamicii din ecuațiile Lagrange și din ecuațiile canonică Hamilton în aproximația clasică.

$$\mathbf{R}: F = \dot{\mathbf{r}}$$

2.12. Să se scrie legea mișcării pendulului simplu cu ajutorul ecuației Lagrange.

$$\mathbf{R}: \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

3. ELEMENTE DE TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE

Legile mecanicii sunt aceleași în orice sistem de referință inerțial. Principiul relativității al lui Einstein afirmă că legile fizicii sunt aceleași în orice sistem de referință inerțial.

3.1. Transformările Lorenz-Einstein

Teoria relativității restrânse are la bază două principii formulate de Einstein:

Legile fizicii se pot exprima prin ecuații care au aceeași formă în toate sistemele de referință ce se mișcă cu viteză constantă unul față de altul;

Viteza luminii are aceeași valoare pentru toți observatorii, indiferent de starea lor de mișcare cu viteză constantă unul față de altul.

Pentru deducerea formulelor de transformare care să satisfacă cele două principii ale lui Einstein, trebuie să se considere transformări liniare mai generale decât galileene și anume:

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta t; \\ y' = y; \\ z' = z; \\ t' = \gamma x + \delta t. \end{cases} \quad (3.1)$$

Deoarece din figura 3.1 se observă că originea sistemului S' se mișcă față de S cu viteza v de-a lungul axei Ox , înseamnă că pentru $x'=0$ se obține $x = vt$. Din prima relație (3.1), rezultă:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha vt + \beta t; \\ \beta &= -\alpha v. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Analog se poate considera că sistemul S se mișcă față de S' cu viteza v de-a lungul axei Ox . Deci pentru $x=0$ se obține $x' = -vt'$. Ținând cont de aceste condiții, de relația (3.2) și înlocuindu-le în prima și a patra relație (3.1), se obține:

$$\begin{aligned} -vt' &= -\alpha vt; \\ t' &= \delta t \Rightarrow \\ \delta &= \alpha. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se presupune că la momentul, inițial, când cele două sisteme se consideră în coincidență, se emite din originea lor comună un semnal luminos, iar undele luminoase se vor propaga cu aceeași viteză față de cele două sisteme, în toate direcțiile. În particular, pentru direcția comună Ox se poate scrie:

$$\frac{x}{t} = c, \quad \frac{x'}{t'} = 0. \quad (3.4)$$

Raportul:

$$\begin{aligned} \frac{x'}{t'} &= \frac{\alpha x + \beta t}{\gamma x + \delta t} = \frac{\alpha x}{\gamma x + \alpha t} - \frac{\alpha vt}{\gamma x + \alpha t} = c, \Rightarrow \\ \gamma &= -\frac{v}{c^2} \alpha \end{aligned} \quad (3.5)$$

După cele prezentate, formulele de transformare (3.1) se pot scrie sub forma:

$$\begin{cases} x' = \alpha(x - vt); \\ y' = y; \\ z' = z; \\ t' = \alpha\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \end{cases} \quad (3.6)$$

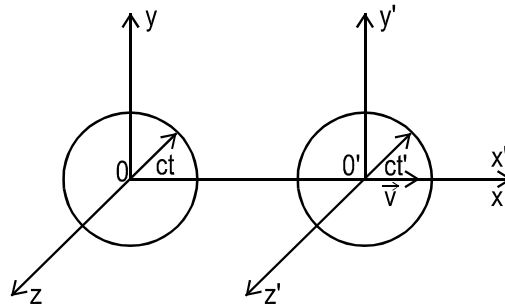


Figura 3.1

Din principiul constanței vitezei luminii față de cele două sisteme rezultă că fronturile de undă trebuie să aibă formă sferică față de ambele sisteme dacă se consideră propagarea semnalului luminos în toate direcțiile din spațiu (fig. 3.1), adică:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2; \quad (3.7)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2. \quad (3.8)$$

Transformările (3.6) trebuie să ducă cele două sfere una în alta; înlocuind aceste transformări în (3.8) și reducând termenii asemenea se obține:

Din formulele de transformare Lorentz-Einstein (3.9) rezultă că poziția și durata unui eveniment depind de sistemul de referință în care se efectuează măsurătoarea lor. Aceste transformări trec în cele galileene dacă viteza relativă, v , a celor două sisteme este mult mai mică decât viteza luminii.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\ y' = y; \\ z' = z; \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{array} \right. \quad \text{sau} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\ y = y'; \\ z = z'; \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

3.2. Consecințe ale transformărilor Lorentz-Einstein

Mărimile care au aceeași valoare în toate sistemele de referință sunt cantități invariante universale.

Evenimentul este un fenomen care are loc la un moment t într-un punct x, y, z din spațiu. Un eveniment se poate reprezenta printr-un punct într-un spațiu cu patru dimensiuni (x, y, z, t) numit spațiu-timp. Coordonatele spațio-temporale ale unui eveniment, depinzând de sistemul inerțial considerat, sunt mărimi relative.

Diferențele dintre coordonatele a două evenimente, față de un sistemul de coordonate S , sunt:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1. \quad (3.10)$$

Dacă cele două evenimente se produc în același timp $\Delta t = 0$, dar nu neapărat în același loc, ele se numesc *simultane*. Dacă evenimentele se produc în același loc ($\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta z = 0$), dar nu neapărat în același moment se numesc *colocale*, iar dacă se produc în același loc și în același moment ($\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta z = 0, \Delta t = 0$): ele coincid sau *sunt absolut simultane*.

3.2.1. Constrația lungimilor

Se consideră o bară care se află în repaus față de sistemul de referință S' , de-a lungul axei $O'x'$ (fig. 3.2). Un observator aflat în acest sistem determină coordonatele x'_1 și x'_2 ale capetelor barei, găsind că bara are lungimea:

$$l' = \Delta x' = x'_2 - x'_1.$$

Un alt observator aflat în sistemul S față de care bara împreună cu sistemul S' se mișcă în direcția axei Ox cu viteza v (fig. 3.2), determină în același moment, deci pentru $\Delta t = 0$, coordonatele x_1 și x_2 și găsește că:

$$l = \Delta x = x_2 - x_1,$$

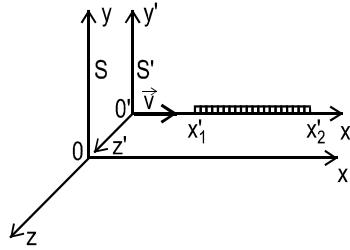


Figura 3.2

în ipoteza $\Delta t = 0$, rezultă:

$$l = l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.11)$$

Fenomenul prin care observatorul față de care bara se mișcă determină o lungime mai mică decât observatorul față de care bara se află în repaus este cunoscut sub numele de constrația Lorentz-Fitzgerald a lungimilor.

3.2.2. Dilatarea intervalelor de timp

Timpul – ca și spațiul – este o mărime relativă. Dacă în sistemul S' se produc două evenimente la un interval $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ între ele, dar în același punct al axei $O'x'$, $\Delta x' = 0$, atunci rezultă:

$$\Delta x = \frac{v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \Delta t > \Delta t'. \quad (3.12)$$

Efectul prin care un interval de timp măsurat de un observator aflat în repaus în S' va apărea în S mai lung decât în S' se numește dilatația timpului.

3.3. Dinamica relativistă

Masa oricărui corp este o mărime variabilă în funcție de viteza corpului.

$$m = m_0 \cdot f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.13)$$

unde m_0 este masa de repaus a corpului: m masa de mișcare corespunzătoare vitezei v .

Relația (3.13) arată o creștere a masei o dată cu mărimea vitezei (fig. 3.3), tinzând la infinit, când viteza se apropie de viteza luminii.

Se știe că starea mecanică din timpul mișcării unui corp este dată de produsul dintre masa acestuia și viteza cu care se mișcă:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (3.14)$$

și poartă numele de impuls.

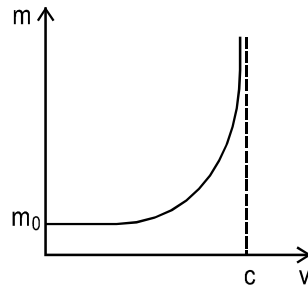


Figura 3.3

Pentru a păstra forma impulsului din mecanica nerelativistă, se impune introducerea în relația (3.14) a expresiei relativiste (3.13), adică:

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.15)$$

unde m_0 este masa de repaus a corpului.

Pentru găsirea legăturii dintre forță și impuls, se pleacă de la definiția forței și se ține seama de expresia (3.15), obținându-se:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Având în vedere expresia lucrului mecanic dL , efectuat de forța \vec{F} asupra corpului de masă m , pe distanța elementară $d\vec{r}$, se scrie:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot d\vec{r} = d(m \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} \quad \text{sau} \quad dL = c^2 dm,$$

care, integrată între limitele 0 și Δm , dă variația energiei cinetice a corpului care se mișcă cu o viteză corespunzătoare domeniului relativist:

$$\Delta T = \Delta m \cdot c^2. \quad (3.16)$$

Pentru un corp cu masa m , energia totală este:

$$W = mc^2. \quad (3.17)$$

Pentru $v = 0$, rezultă energia de repaus a corpului:

$$W_0 = m_0 c^2. \quad (3.18)$$

Energia cinetică a corpului considerat este:

$$T = (m - m_0) c^2. \quad (3.19)$$

Relațiile (3.16) și (3.17) sunt verificate cu foarte bună precizie în toate procesele fizice în care intervin variații suficient de mari ale energiei (de exemplu, în fizica nucleară), dată fiind valoarea foarte mare a lui c .

Expresia impulsului este:

$$p^2 = (m^2 - m_0^2) c^2. \quad (3.20)$$

Aplicații

3.1. Să se scrie soluția ecuației de mișcare pentru o particulă de masă de repaus m_0 , aflată în mișcare relativistă unidimensională sub acțiunea unei forțe constante.

Rezolvare:

Ecuația de mișcare este de forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = F \Rightarrow m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dt} = F ;$$

$$\frac{F}{m_0} = a ; \quad \int_0^v \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} dv = \int_0^t a dt ; \quad \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = at ; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} ;$$

$$x = \int_0^t \frac{at dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{a} \left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \right) ; \quad \frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{a} \right)^2} - \frac{t^2}{\left(\frac{c^2}{a} \right)^2} = 1 .$$

Dependența $x = f(t)$ este hiperbolică. Curba tinde asimptotic spre o mișcare uniformă cu viteza c .

3.2. Durata de viață a miuonilor μ în raport cu referențialul propriu este $\tau_0 \cong 2,5 \cdot 10^{-6} s$. Un observator de pe Pământ constată că miuonii produși la înălțimea $H = 22,5 km$ ajung pe Pământ. Să se determine dilatarea timpului observată de pe Pământ în ipoteza că viteza miuonilor este foarte apropiată de viteza luminii și să se determine valoarea acestei viteze.

Rezolvare:

Intervalul de timp Δt , după care miuonii μ ajung pe Pământ este:

$$\Delta t = \frac{H}{c} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 7,5 \cdot 10^{-5} s.$$

Se obține:

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\tau_0} = \frac{7,5 \cdot 10^{-5}}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 30,$$

unde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} ; \beta = \frac{v}{c}.$$

Pentru determinarea vitezei miuonilor μ se folosește faptul că intervalul de timp este minim în sistemul de referință propriu.

3.3. Să se determine timpul de viață al miuonilor μ a căror energie este $\mathcal{E} = 10^9 \text{ eV}$, dacă timpul de viață în referențialul propriu este $\tau_0 \approx 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, iar masa de repaus este $m_{\mu 0} = 206,77 m_e$.

Rezolvare:

Factorul γ este dat aici de relația:

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0},$$

Se calculează energia de repaus, \mathcal{E}_0 , a miuonilor μ :

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2 = 1,69345 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 1,06 \cdot 10^8 \text{ eV} \rightarrow \gamma = 9,44819 \rightarrow$$

timpul de viață al miuonilor μ de energie $\mathcal{E} = 10^9 \text{ eV}$ este:

$$\Delta t = \gamma \tau_0 = 23,62 \mu\text{s}.$$

3.4. Energia mezonilor rapizi din razele cosmice este 3 GeV , iar energia lor de repaus este de 100 MeV . Ce distanță pot străbate acești mezonii în atmosferă în timpul lor de viață, dacă în referențialul propriu au timpul de viață $\tau_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-8} \text{ s}$?

Rezolvare:

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = 30 \rightarrow \Delta t = \gamma \tau_0 = 375 \text{ ns}.$$

Distanța parcursă în atmosferă în acest interval de timp de viață este:

$$x = v \Delta t = c \tau_0 \sqrt{\gamma^2 - 1} = 112,44 \text{ m}.$$

3.5. Durata de viață proprie, într-un sistem de referință inerțial legat de particulă, a unei particule instabile este $\tau_0 \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. Să se calculeze distanța pe care o parcurge particula până la dezintegrare într-un sistem de referință inerțial față de care durata sa de viață este $\Delta t \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

Rezolvare:

Distanța l , pe care o parcurge particula până la dezintegrare este dată de relația:

$$l = v \Delta t.$$

Pe de altă parte:

$$\Delta t = \gamma \tau_0.$$

de unde obținem pentru spațiul parcurs expresia:

$$x = v \Delta t = \beta c \gamma \tau_0 = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = c \sqrt{\Delta t^2 - \tau_0^2} = 12 \text{ m}$$

3.6. O bară cilindrică de lungime l_0 , se află în repaus în planul $x'O'y'$ al referențialului propriu și face unghiul θ^0 cu axa $O'x'$. Care este lungimea și

orientarea barei în SL față de care referențialul propriu se deplasează cu viteza constantă v ?

Rezolvare:

Lungimea barei cilindrice, în orice sistem de referință plan, este dată de relația:

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2$$

Componentele în cele două dimensiuni sunt date de relațiile:

$$l_1(l) = l_1(0) \sqrt{1 - \beta^2} = l_1(0) \sqrt{1 - \beta^2} \cos \theta_1, \quad \text{respectiv:}$$

$$l_2 = l_1 \sin \theta_1.$$

Lungimea și orientarea barei în SL este dată de relațiile:

$$l = l_1 \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \theta_1}$$

$$\tan \theta = l_2 / l_1(l) = (\tan \theta_1) / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

3.7. Un corp sferic de rază R , are, în repaus, volumul $V_0 = \frac{4\pi R^3}{3}$. Ce volum va înregistra un observator plasat într-un sistem de referință inerțial față de care corpul se deplasează cu viteza constantă v ?

Rezolvare:

Se consideră că sfera se deplasează în lungul axei Ox . În această ipoteză elipsoidul de rotație de semiaxe $(R\sqrt{1 - \beta^2}, R, R)$ are pentru volumul lui expresia:

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 \sqrt{1 - \beta^2} = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

3.8. Densitatea unui corp în repaus este ρ_0 . Să se determine viteza unui sistem de referință inerțial în raport cu care densitatea corpului devine $n\rho$ ($n < 1$).

Rezolvare:

Din relațiile de transformare a masei și volumului în teoria relativității restrânse:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2};$$

se obține pentru densitate:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0}{1 - \beta^2} = n\rho_0,$$

de unde rezultă pentru viteză expresia:

$$n = \frac{1}{1 - \beta^2} \rightarrow \beta^2 = \frac{n - 1}{n} \rightarrow v = \frac{c\sqrt{n - 1}}{n}.$$

4. FIZICA FLUIDELOR

4.1. Statica fluidelor

Un fluid în echilibru se află în repaus față de un reper inerțial legat de Pământ.

Valoarea presiunii este aceeași în toate direcțiile și presiunea se transmite cu aceeași intensitate în tot fluidul dacă forțele masice sunt mult mai mici decât forțele de presiune. Această afirmație constituie principiul lui Pascal și a fost confirmat experimental.

Pentru a deduce ecuația generală a staticii fluidelor, se consideră un element de volum dV dintr-un fluid în echilibru (fig. 4.1). Asupra lui acționează forțele determinate de presiunea fluidului exterior, $d\vec{F}_x$, $d\vec{F}'_x$ și greutatea proprie a elementului de fluid, $d\vec{G}_x$. Presiunile $d\vec{F}$ pe aria laterală se anulează reciproc două câte două. Condiția de echilibru este:

$$d\vec{F}_x - d\vec{F}'_x + d\vec{G}_x = 0$$

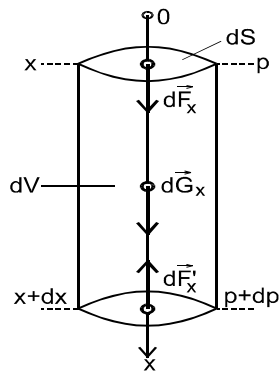


Figura 4.1

Făcând proiecția pe axa Ox se obține:

$$dF_x - dF'_x + dG_x = 0$$

$$pdS - (p + dp)dS + \rho g_x dS dx = 0.$$

Dacă se consideră că, $p = p(x, y, z)$ se scrie:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z$$

Prin înmulțirea acestor relații cu versorii corespunzători și însumarea lor se obține ecuația generală a staticii fluidelor.

$$\text{grad } p = \rho \vec{g}. \quad (4.1)$$

$$p = p_0 \cdot \exp^{\frac{-\rho_0}{\rho_0} gz}. \quad (4.2)$$

Aplicațiile acestor principii ale staticii fluidelor sunt: determinarea densității corpurilor, stabilirea condițiilor de plutire, măsurarea presiunilor, determinarea forțelor hidrostatice, presa hidraulică, ridicător hidraulic, acumulator hidraulic etc.

4.2. Dinamica fluidelor reale

Fluidele reale sunt compresibile și vâscoase. De aceea apar forțe tangențiale, numite forțe de viscozitate, care se opun alunecării relative a straturilor vecine de fluid. Curgerea laminară a fluidelor reale prin conducte

Se consideră o conductă orizontală de secțiune circulară constantă prin care se deplasează un fluid real, în mișcare laminară. Coaxial cu conducta se află un tub de curent cilindric, de rază variabilă r și de lungime l (fig. 4.2).

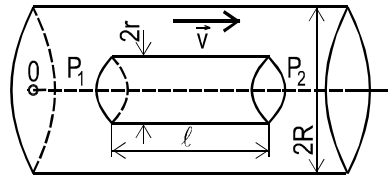


Figura 4.2

Asupra bazelor acestui tub acționează forțele determinate de presiunile p_1 și p_2 . Pe suprafața laterală a tubului de curent se exercită forțele de frecare internă. Relația de echilibru pentru cazul dat este:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l. \quad (4.3)$$

S-a avut în vedere că mișcarea fluidului are o simetrie axială, adică $v = v(x, r)$. Din (4.3) se obține:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (4.4)$$

Într-o curgere laminară printr-o conductă orizontală, de secțiune circulară constantă, viteza este distribuită sub forma unui paraboloid de rotație.

Viteza fluidului are valoarea maximă în axul conductei:

$$v_{\max} = \frac{\Delta p \cdot R^2}{4\pi\eta l}$$

Viteza medie a fluidului se poate determina cu ajutorul schemei prezentate în figura 4.5. Considerăm o secțiune inelară de grosime dr , situată la distanța r față de axa conductei. Pentru aceasta, viteza v este aproximativ constantă, iar debitul volumic elementar este:

$$dQ_v = v dS = v \cdot 2\pi r \cdot dr. \quad (4.5)$$

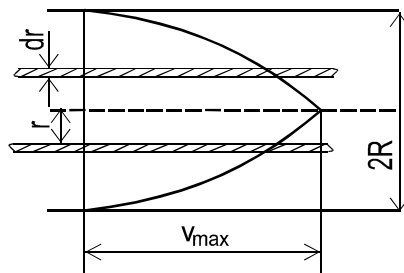


Figura 4.3

Debitul volumic total se obține prin integrarea relației (4.4.), adică:

$$Q_v = 2\pi \int_0^R v r dr = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4. \quad (4.6)$$

Relația (4.6) se numește legea lui Poiseuille și arată că debitul volumic este proporțional cu diferența de presiune pe unitatea de lungime a conductei și cu puterea a patra a razei conductei.

4.3. Teoria cinetico-moleculară a gazelor

4.3.1. Gaze reale

Van der Waals, luând în considerare volumul propriu al moleculelor de gaz și forțele de interacțiune dintre molecule, a introdus două corecții în

ecuația de stare a gazelor ideale, pentru ca acestea să descrie comportarea gazelor reale.

Dacă asupra gazului real se exercită din exterior presiunea p , atunci ecuația Van der Waals pentru un kilomol de gaz are forma:

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT, \quad (4.7)$$

unde V_M este volumul unui kilomol de gaz. Corecția $\frac{a}{V_M^2}$ este presiunea internă cauzată de forțele de coeziune dintre molecule. Această presiune se adaugă la presiunea externă motiv pentru care gazele reale sunt mai compresibile decât gazele ideale. Corecția b ia în considerare volumul propriu al moleculelor și de aceea se numește *covolum*. Considerând că moleculele gazului sunt sfere elastice, rezultă că volumul în care se deplasează fiecare moleculă este egal cu volumul spațiului dintre molecule. Corecția b arată că gazele reale nu pot fi comprimate până la anularea volumului. Constantele a și b au valori dependente de natura gazului și se determină experimental.

Ecuația de stare pentru ν kilomoli de gaz care ocupă, volumul $V = \nu V_M$, este:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT. \quad (4.8)$$

Ecuația scrisă pentru T_C și p_C , are forma:

$$V_M^3 - \left(\frac{RT_C}{p_C} + b\right)V_M^2 + \frac{a}{p_C}V_M - \frac{a \cdot b}{p_C} = 0. \quad (4.9)$$

$$\frac{RT_C}{p_C} + b = 3V_{MC}; \quad \frac{a}{p_C} = 3V_{MC}^2; \quad \frac{a \cdot b}{p_C} = V_{MC}^3$$

Parametrii de stare critici, în funcție de corecțiile a și b , adică:

$$V_{MC} = 3b; \quad p_C = \frac{a}{27b^2}; \quad T_C = \frac{8a}{27b \cdot R}. \quad (4.10)$$

Înlocuind în expresia lui T_C pe $a = 3p_C V_{MC}^2$ și pe $b = \frac{V_{MC}}{3}$ rezultă:

$$p_C V_{MC} = \frac{3}{8} RT_C \quad (4.11)$$

care reprezintă ecuația de stare pentru punctul critic scrisă pentru $v = 1$ kilomol de gaz.

În punctul critic, căruia îi corespund parametrii critici, coexistă faza lichidă și faza gazoasă fără să existe o deosebire între ele. Prin fază se înțelege una din părțile omogene (gazoasă, lichidă sau solidă), ale unui sistem eterogen, care se poate separa de restul sistemului prin metode fizice.

Dacă se reprezintă grafic o izotermă Van der Waals pentru o temperatură mai mică decât cea critică, se obține curba *ABCDEFG* din figura 4.4 și se observă că pentru presiunea p_1 există trei rădăcini distincte: V_{M1} , V_{M2} și V_{M3} .

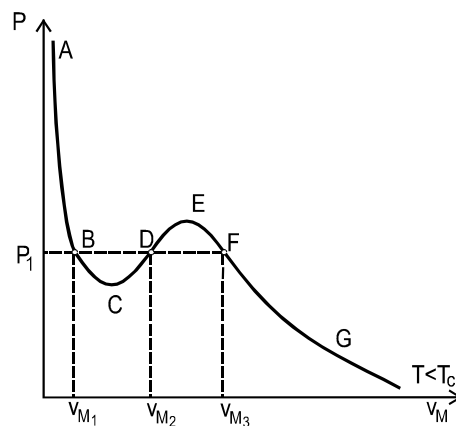


Figura 4.4

În cazul în care într-un corp de pompă, gradat în unități de volum și pus în legătură cu un manometru se introduce un gaz supus la o comprimare izotermă se constată că se obține curba experimentală *GFBA* și anume: pe porțiunea *GF*, în corpul de pompă există gaz, pentru palierul *FB* gazul începe să se lichefieze, iar în *B* întreaga cantitate de gaz este lichefiată. Lichidele fiind foarte puțin compresibile, pentru a le comprima în continuare, este necesară o presiune mare.

Curbele experimentale, obținute de Andrews (fig.4.5), corespunzătoare bioxidului de carbon prezintă *izoterma critică* și *curba*

punctată, numită *curbă de saturație* care delimitează patru zone: I-gaz; II-vapori; III-vapori saturați și lichid; IV-lichid.

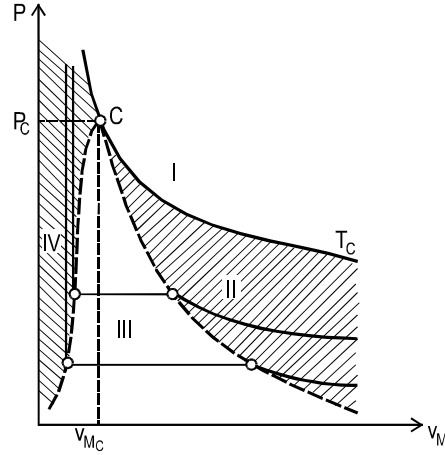


Figura 4.5

Punctul critic este un punct de inflexiune a izotermei în care tangenta la curbă este orizontală. Folosind expresiile (4.10) se găsesc constantele a , b și R în funcție de parametrii critici.

$$a = 3p_C V_{MC}^2; \quad b = \frac{V_{MC}}{3}; \quad R = \frac{8a}{27bT_C}. \quad (4.12)$$

Înlocuind aceste valori în relația (4.7), prin simplificări și înmulțire cu $\frac{3}{p_C V_{MC}}$, rezultă expresia:

$$\left[\frac{p}{p_C} + 3 \left(\frac{V_M}{V_{MC}} \right)^{-2} \right] \left[3 \left(\frac{V_M}{V_{MC}} \right) - 1 \right] = 8 \frac{T}{T_C}. \quad (4.13)$$

Valorile parametrilor de stare sunt: presiunea redusă, volumul redus și respectiv, temperatura redusă:

$$\pi = \frac{p}{p_C}; \quad \phi = \frac{V_M}{V_{MC}}; \quad \theta = \frac{T}{T_C}. \quad (4.14)$$

Din relațiile (4.11) și (4.12) rezultă ecuația Van der Waals în mărimi reduse:

$$(\pi + 3\phi^{-2})(3\phi - 1) = 8\theta. \quad (4.15)$$

Se constată că ecuația redusă nu conține constante caracteristice gazului.

Aplicații

4.1. Un corp de masă m pornește din repaus într-un fluid vâscos cu factorul de rezistență r . Să se afle :

- a) expresia vitezei corpului în dependența: $v = f(t)$;
- b) expresia legii de mișcare în dependența $z = f(t)$ considerând originea axei în punctul de plecare;
- c) viteza de disipație a energiei de la mobil spre mediul de mișcare.

Rezolvare:

a) $m \frac{dv}{dt} = mg - rv$, de unde explicităm dt :

$$dt = \frac{m}{mg - rv} dv.$$

Integrând se obține: $t = -\frac{m}{r} \ln(mg - rv) + \ln C$

La $t_0=0$; $v_0=0$, $\Rightarrow C=mg$

$$v = \frac{mg}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{m}t\right) \right]$$

Pentru $t \rightarrow \infty$, $\exp\left(-\frac{r}{m}t\right) \rightarrow 0$ și:

$$v \Big|_{t \rightarrow \infty} = v_{\lim} = \frac{mg}{r}, \text{ atinsă când : } m\vec{g} = -r\vec{v}$$

b) $\frac{dz}{dt} = v \Rightarrow z = \int_0^t v dt = \frac{mg}{r} \left[t + \frac{m}{r} \exp\left(-\frac{r}{m}t\right) \right]$ ecuație valabilă pe

durata regimului tranzitoriu.

c) $d(T + U) = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$; ($\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{v}$), deci:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -rv^2$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{m^2 g^2}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{m}t\right) \right]$$

Pentru $t \rightarrow \infty$, $\exp\left(-\frac{r}{m}t\right) \rightarrow 0$ și deci:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{m^2 g^2}{r} = -mg \cdot v_{\text{lim}}.$$

Pentru t foarte mare $T = \text{ct.}$ iar $|\Delta U| = Q$,

Q - cantitate de căldură preluată de mediu de la mobil.

4.2. Pe un cărucior se află un vas cilindric plin cu apă, înălțimea apei din vas fiind 1 m . Vasul este prevăzut în părți opuse cu două robinete având secțiunea $s = 10 \text{ cm}^2$ fiecare. Primul este situat la fundul vasului, iar celalalt la 25 cm față de fundul vasului. Ce forță trebuie aplicată căruciorului și în ce sens trebuie ea orientată pentru ca el să rămână nemișcat, atunci când se deschid ambele robinete.

R: $F = 5\text{N}$

4.3. Un vas cilindric deschis are diametrul de 10 cm. La fundul vasului în mijloc, se practică un orificiu de suprafață 1cm^2 . Se toarnă apă în vas, cu un debit constant de $1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

a) La ce înălțime se va stabili nivelul apei în vas?

b) Odată atinsă înălțimea stabilită la punctul anterior, se oprește turnarea apei. În cât timp se va goli vasul?

R: a) $h = 10^{-1} \text{ m}$; b) $t = 11\text{s}$.

4.4. Într-un vas, așezat pe pământ, se află apa până la înălțimea de 2 m față de fundul vasului. La ce înălțime trebuie găurit peretele vasului pentru ca apa ce ar această țâșni prin orificiu să atingă pământul la maximum de distanță? Cât de mare este distanță?

R: $h = 1\text{m}$; $x = 2\text{m}$.

TEST DE AUTOEVALUARE I

1.O barcă cu motor parcurge o distanță pe un râu în sensul curgerii apei în $t_1 = 1\text{h}$, iar un colac de salvare în $t_2 = 4\text{h}$. Barca parcurge același drum în sens invers curgerii râului în:

- a) 1h; b) 2h; c) 3h; d) 4h; e) 5h; f) 6h.

2. Un corp parcurge o mișcare conform legii: $x = 16t - 8t^2(m)$, unde x se măsoară în metri și timpul în secunde. După primele $t = 2s$, viteza medie a corpului este egală cu:

- a) 0; b) 1m/s; c) 2m/s; d) 3m/s; e) 4m/s; f) 5m/s.

3. O minge este lansată vertical în sus cu viteza inițială $v_0 = 40 \frac{m}{s}$. Dacă mingea pierde jumătate din energia sa prin ciocnirea cu solul, înălțimea la care ajunge mingea după prima ciocnire, cunoscându-se $g = 10 \frac{m}{s^2}$, este egală cu:

- a) 80m; b) 70m; c) 60m; d) 50m; e) 40m; f) 30m.

4. Un corp cu masa $m_1 = 0,1 kg$ este aruncat de jos în sus pe verticală cu viteza inițială $v_{01} = 40 \frac{m}{s}$. În același moment, de la înălțimea maximă la care ajunge primul corp, este lăsat să cadă liber un al doilea corp de masă $m_2 = 60g$. Cele două corpuri se ciocnesc plastic și își continuă mișcarea ca un singur corp. Viteza cu care corpul nou format atinge solul este egală cu:

- a) 25m/s; b) 30m/s; c) 35m/s; d) 40m/s; e) 45m/s; f) 50m/s.

5. Un corp de masă $m = 0,02 kg$ coboară pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45^\circ$ cu planul orizontal cu frecare ($\mu = 0,3$), pornind din vârful planului înclinat cu viteza $v_0 = \frac{2m}{s}$ și ajungând la baza planului în $t = 2s$. La baza planului corpul lovește un resort cu masă neglijabilă și constantă elastică $k = \frac{50N}{m}$ așezat pe planul orizontal. Resortul împreună cu corpul formează un oscilator armonic orizontal. Se cunoaște $g = \frac{10m}{s^2}$. Amplitudinea oscilațiilor este egală cu:

- a) 0,06m; b) 0,12m; c) 0,18m; d) 0,24m; e) 0,3m; f) 0,36m.

6. Ecuația mișcării oscilatorii a unui punct material este $y = 0,4 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) (m)$. Accelerația maximă a mișcării este:

a) $4 \frac{m}{s^2}$; b) $-4 \frac{m}{s^2}$; c) $8 \frac{m}{s^2}$; d) $-8 \frac{m}{s^2}$; e) $16 \frac{m}{s^2}$; f) $-16 \frac{m}{s^2}$.

7. Un punct material oscilează după legea $y = A \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) (m)$. Raportul dintre energiile cinetică și potențială ale punctului material la momentul $t = \frac{T}{8}$ este egal cu:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4; f) 5.

8. Un punct material de masă $m_0 = 10g$ oscilează în jurul poziției sale de echilibru după ecuația $y = 0,4 \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right) (m)$. Când trece prin poziția de elongație maximă, punctul material lovește o bilă cu masa $m = 2,5g$, transmițându-i întreaga energie. Viteza bilei în urma impactului este egală cu:

a) 5 m/s; b) 10 m/s; c) 15 m/s; d) 20 m/s; e) 25 m/s; f) 30 m/s.

9. Un corp este lansat vertical în jos de la înălțimea $H = 10 m$, cu viteza inițială $v_0 = \frac{5m}{s}$. Înălțimea h la care energia sa cinetică este de $n=4$ ori mai mare decât energia sa potențială, dacă se ia $g = 10 \frac{m}{s^2}$, este egală cu:

a) 1m; b) 1,8m; c) 2,25m; d) 2,7m; e) 3m; f) 5m.

10. Energia cinetică a unui punct material de masă $m = 0,5 g$ care oscilează armonic cu amplitudinea $A = 5 cm$ și frecvența $\nu = \frac{1}{\pi}$ Hz când se află la distanța $y = 4 cm$ de poziția de echilibru este egală cu:

a) $0,2 \mu J$; b) $0,35 \mu J$; c) $0,5 \mu J$; d) $0,65 \mu J$; e) $0,8 \mu J$; f) $0,9 \mu J$.

Soluțiile testului sunt la pagina 202.

MODULUL II

OBIECTIVELE MODULULUI II

- Termodinamica fenomenologică are avantajul că folosind un număr mic de parametrii, poate determina starea unui sistem, precum și evoluția sa în timp, dintr-o stare de echilibru în altă stare de echilibru.
- Termodinamica statistică, pentru a scoate în evidență natura fenomenelor termice, ține seama de structura moleculară și de mecanismul proceselor la scară microscopică.

CONȚINUTUL MODULULUI II

5. TERMODINAMICA	72
5.1. Principiul zero al termodinamicii	72
5.2. Principiul întâi al termodinamicii	72
Aplicații.....	77
5.3. Principiul al doilea al termodinamicii.....	79
Aplicații.....	82
5.4. Principiul al treilea al termodinamicii.....	83
Aplicații.....	84
TEST DE AUTOEVALUARE II.....	87

BIBLIOGRAFIE

1. Sălceanu C. - *Căldură și termodinamică*, E.D.P., București, 1968.
2. Pop I. - *Fizica moleculară și căldura*, E.D.P., București, 1975.
3. Roy M. - *Thermodynamique macroscopique*, Paris, Dunod, 1964.
4. Gherman O. - *Fizica statistică*, Ed. Tehnică, București, 1976.
5. Landau D., Lifșitș E. - *Fizica Statistică*, București, 1988.
6. Liana Șandru, *Fizica*, E.D.P., București, 1994.
7. 7 Liana Șandru, *Fizica*, Ed. U.P.G., Ploiești, 2005.

MODULUL II

5. TERMODINAMICA

5.1. Principiul zero al termodinamicii

Temperatura este o mărime fizică ce caracterizează starea sistemului termodinamic împreună cu ceilalți parametri de stare. Ea a fost introdusă de Maxwell în 1891 prin formularea următorului postulat: două sisteme aflate în echilibru termic cu un al treilea simultan sau succesiv, se află în echilibru termic între ele. Acest postulat mai este cunoscut sub numele de principiul de zero al termodinamicii.

Scara de temperatură absolută are avantajul că este independentă de natura substanței de lucru, adică a substanței termometrice. Intervalul de un Kelvin este egal cu gradul Celsius, iar relația dintre valorile temperaturilor măsurabile în cele două scări este $TK = t^{\circ}C + 273,15$ de unde rezultă că punctul triplu al apei corespunde la temperatura de $0^{\circ}C$.

5.2. Principiul întâi al termodinamicii

În modul cel mai general, primul principiu exprimă conservarea energiei sub forma: “fiecare cantitate de energie de un fel își are echivalentul într-o cantitate de energie de alt fel, astfel încât suma algebrică a tuturor energiilor care intervin în transformare să fie nulă”. Conform principiului întâi al termodinamicii căldura transmisă unui sistem termodinamic închis servește parțial la variația energiei interne a sistemului, iar restul, la efectuarea de lucru mecanic, adică:

$$Q = \Delta U + L. \quad (5.1)$$

Lucrul mecanic și căldura, depinzând de caracterul procesului, sunt mărimi de proces și deci nu admit diferențiale totale exacte. Mărimea $Q - L$ este o diferențială totală exactă. La variații foarte mici ale mărimilor Q , L și U , expresia este:

$$\delta Q = dU + \delta L. \quad (5.2)$$

Prin δ s-a notat variația elementară a unei mărimi care nu este diferențială totală exactă.

Aplicații ale principiului întâi a termodinamicii la gazele perfecte. Procese politrope. Informații prețioase legate de transformările proceselor termodinamice se obțin cu ajutorul principiului întâi al termodinamicii. Pentru rezolvarea problemelor teoretice și practice, se studiază procesele în care unul din parametri de stare rămâne constant în timpul transformării.

Procesele politrope au drept cazuri particulare procesele adiabate, izoterme, izocore și izobare.

Procesul politrop este procesul care are loc când capacitatea calorică este menținută constantă. Toate procesele politrope sunt cvasistatice și reversibile.

Dacă termenul $(\partial U / \partial V)_T = 0$, deoarece forțele de interacțiune sunt considerate egale cu zero, la gazele perfecte, se obține:

$$C = C_V + p \frac{dV}{dT} . \quad (5.3)$$

$$(C - C_V)dT = p dV . \quad (5.4)$$

Introducând relația:

$$p dV + V dp = R dT , \quad (5.5)$$

obținută prin diferențierea ecuației de stare, scrisă pentru un mol de gaz, în relația (5.4), se obține:

$$\frac{C - C_p}{C - C_V} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 . \quad (5.6)$$

Coeficientul adimensional:

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} , \quad (5.7)$$

se numește exponent politropic.

$$n \cdot \ln V + \ln p = \text{const.}$$

sau:

$$p V^n = \text{const.} \quad (5.8)$$

Diferitele valori particulare ale exponentului politrop conduc la întreaga gamă de procese politrope posibile. Astfel, $n=0$ corespunde unui proces izobar ($p = \text{const}$), $n=1$ corespunde unui proces izoterm ($pV = \text{const}$), $n = \gamma = \frac{C_p}{C_v}$ corespunde unui proces adiabatic ($pV^\gamma = \text{const}$), iar $n = \pm\infty$ corespunde unui proces izocor ($V = \text{const}$).

Procesul adiabatic este considerat ca fiind acela în cursul căruia sistemul nu schimbă căldură cu exteriorul, adică: $\delta Q = 0$. În acest caz din expresia principiului întâi al termodinamicii rezultă:

$$-dU = p \cdot dV, \quad (5.9)$$

adică, lucrul mecanic furnizat de sistem se face numai pe seama energiei sale interne. Din relațiile $dU = C_v \cdot dT$ și (5.9) rezultă:

$$C_v dT + p dV = 0. \quad (5.10)$$

Expresia reprezintă forma diferențială a legii unui proces adiabatic; pentru a obține forma integrală, se introduce relația (5.5) și (5.10), obținându-se:

$$(C_v + R) \cdot p dV + C_v V \cdot dp = 0. \quad (5.11)$$

Având în vedere relația lui Robert Mayer, prin împărțirea ecuației (5.11) cu $C_v pV$, se obține:

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0, \quad (5.12)$$

unde $\gamma = C_p / C_v$ este coeficientul adiabatic.

Prin integrarea ecuației (5.12) rezultă:

$$\gamma \ln V + \ln p = \text{const.}, \quad (5.13)$$

sau $pV^\gamma = \text{const.}$

Folosind legea gazelor perfecte, ecuația (5.13) se mai poate scrie și sub forma:

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const.}. \quad (5.14)$$

Ecuația care descrie transformarea adiabatică este cunoscută sub denumirea de ecuația lui Poisson.

Lucrul mecanic într-o transformare adiabatică este:

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = - \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = C_V (T_1 - T_2), \quad (5.15)$$

sau având în vedere că: $C_V = R \frac{C_V}{R} = R \frac{C_V}{C_p - C_V} = \frac{R}{\gamma - 1}$, rezultă:

$$L_{12} = \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2). \quad (5.16)$$

Procesul izoterm se caracterizează prin aceea că se desfășoară la $T = \text{const.}$, adică $dT = 0$. Pentru gazul ideal energia internă $U = \text{const.}$ sau $dU = 0$. Din expresia principiului întâi al termodinamicii rezultă că: $\delta Q = p \cdot dV$ și prin urmare, căldura furnizată sistemului este transformată în lucru mecanic. Valoarea lucrului mecanic între două stări corespunzătoare

volumului V_1 și V_2 este: $L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}$ sau

$$L_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (5.17)$$

De remarcat că într-un sistem de axe (p, V) , curba adiabatei este mai înclinată decât izoterma. În plus, se constată că atât la destindere, cât și la comprimare, transformarea izotermă este mai avantajoasă, deoarece în primul caz se obține un lucru mecanic mai mare, iar în al doilea caz, se cheltuiește un lucru mecanic mai mic decât la transformarea adiabatică (fig. 5.1).

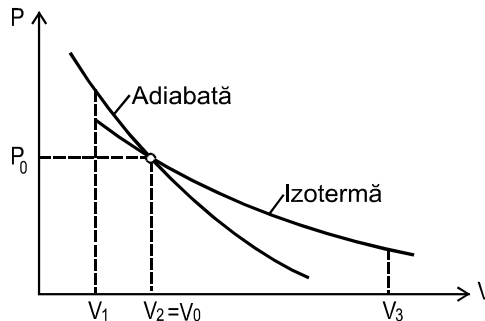


Figura 5.1

Capacitatea calorică a sistemului care realizează o transformare izotermă fiind infinită, înseamnă că pentru a-i modifica temperatura cu ΔT , ar trebui o căldură infinită.

Un sistem care-și păstrează temperatura inițială constantă, indiferent de temperatura sistemului cu care vine în contact, se numește termostat.

Procesul izocor se caracterizează prin aceea că se desfășoară la volum constant. Din expresia principiului întâi al termodinamicii rezultă:

$$dQ = dU$$

sau

$$Q_{12} = U_2 - U_1,$$

adică schimbul de căldură cu mediul exterior conduce la variația energiei interne a sistemului.

Din relația $dU = C_V \cdot dT$ se obține:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 - \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$$

și deci căldura schimbată de sistem în transformarea izocoră este:

$$Q_{V12} = C_V (T_2 - T_1) \quad (5.18)$$

Dacă $T_2 > T_1$, sistemul primește căldură ($\Delta Q > 0$); dacă $T_2 < T_1$, sistemul cedează căldura ($\Delta Q < 0$).

Procesul izobar se produce la presiune constantă. Ca exemplu de proces izobar se poate da procesul de distilare a apei: încălzirea, fierberea și condensarea apei au loc toate la aceeași presiune.

Conform principiului întâi al termodinamicii (5.4), căldura primită de sistem este:

$$\delta Q_p = dU + p dV. \quad (5.19)$$

Întrucât $p = \text{const.}$, rezultă $p dV = d(pV)$ și deci

$$\delta Q_p = d(U + pV)$$

de unde, prin integrare, se obține:

$$Q_{p12} = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1)$$

Notând cu:

$$H = U + pV, \quad (5.20)$$

rezultă:

$$Q_{p12} = H_2 - H_1, \quad (5.21)$$

ceea ce arată că în acest proces, căldura primită de sistem servește exclusiv pentru mărirea cantității H , numită entalpie. Această mărime este o funcție de stare deoarece este suma a doi termeni: energia internă care este o funcție de stare și produsul pV a două variabile de stare.

Entalpia H joacă în procesele izobare același rol pe care îl joacă energia internă U în procesele izocore.

Aplicații

5.1. Un cilindru de volum $V_1 = 15\text{ l}$ conține gaz ideal la presiunea $p_1 = 2,5\text{ atm}$ și temperatura $T_1 = 300\text{ K}$. Care este volumul și temperatura gazului dacă presiunea:

- a) se dublează lent;
- b) se dublează brusc.

Rezolvare:

- a) Dacă presiunea se dublează lent, procesul este izoterm:
 $T_1 = T_2 = 300\text{ K} \rightarrow V_2 = 7,5\text{ l}$.
- b) Dacă presiunea se dublează brusc, procesul este adiabatic:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \text{ cu } \gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

Considerăm că gazul este biatomic:

$$\gamma = 1,4 \rightarrow V_2 = 9,14\text{ l și } T_2 = 365,7\text{ K}.$$

5.2. Să se determine expresia diferenței $C_p - C_v$ pentru gazul van der Waals.

Rezolvare:

Ecuția de stare a gazului van der Waals este:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

unde: $\frac{a}{V^2}$ - presiunea de contact, de coeziune;

b - covolumul, volumul propriu al moleculelor.

Din principiul I al termodinamicii:

$$dQ = \vartheta C_v dT + \left(p + \frac{\vartheta^2 a}{V^2}\right) dV,$$

de unde obținem pentru căldura molară la presiune constant:

$$C_p = \frac{1}{\vartheta} \frac{dQ}{dT} = C_v + \frac{1}{\vartheta} \left(p + \frac{\vartheta^2 a}{V^2}\right) \left(\frac{dV}{dT}\right)_p$$

Se diferențiază ecuația de stare și se obține:

$$C_p - C_v = \frac{R}{1 - \frac{2\vartheta a (V - \vartheta b)^2}{RT V^3}},$$

ce constituie relația lui Robert-Mayer pentru gazul van der Waals.

5.3. O cantitate $\nu = 1 \text{ kmol He}$, primește o cantitate de căldură $Q = 2470 \text{ J}$ pentru a se destinde izoterm de la volumul $V_1 = 3 \text{ m}^3$ la volumul $V_2 = 6 \text{ m}^3$. Să se determine temperatura gazului, considerând că acesta se supune ecuației Van der Waals.

5.4. Să se găsească ecuația procesului adiabatic pentru un gaz care se supune ecuației Van der Waas, presupunând $C_v = \text{const.}$

$$\mathbf{R: } T(V - \nu b)^{\gamma-1} = \text{const.}$$

5.5. Un mol de gaz biatomic aflat la temperatura 300 K , se dilată adiabatic, în starea finală volumul fiind de trei ori mai mare decât în starea inițială. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat prin dilatare și variația energiei interne a gazului.

$$\mathbf{R: } L = 2,2 \cdot 10^3 \text{ J; } \Delta U = -2,2 \cdot 10^3 \text{ J.}$$

5.6. O cantitate $\nu = 2 \text{ kmol He}$, primește o cantitate de căldură $Q = 3473,6 \text{ J}$ pentru a se destinde izoterm de la volumul $V_1 = 4 \text{ m}^3$ la $V_2 = 8 \text{ m}^3$. Să se determine temperatura gazului, considerând că acesta se supune ecuației Van de Waals.

$$\mathbf{R: } T = 300 \text{ K.}$$

5.3. Principiul al doilea al termodinamicii

Fenomenele naturale se desfășoară de la sine, întotdeauna într-un sens bine determinat, atât timp cât nu apare vreo intervenție din exterior.

Un sistem care inițial nu se află într-o stare de echilibru (de exemplu, conține gradienti de concentrație, presiune, temperatură etc.) suferă întotdeauna o transformare într-un sens bine determinat – către starea de echilibru – deși transformarea inversă nu este interzisă de legea conservării energiei. Procesele reversibile sunt cazuri ideale ale proceselor reale și pot fi realizate în condiții speciale.

În general, procesele reale sunt ireversibile. Principiul al doilea al termodinamicii în formularea dată de Clausius este: căldura nu poate trece de la sine de la un corp mai rece la unul mai cald.

Kelvin a dat principiului al doilea al termodinamicii altă formulare: un proces, al cărui singur efect este transformarea completă a căldurii în lucru mecanic, nu se poate realiza. Transformarea completă a căldurii în lucru mecanic se poate realiza practic într-o destindere izotermă a unui gaz, dar acesta nu este singurul efect, deoarece după destindere, gazul ocupă un volum mai mare.

O formulare mai generală a principiului al doilea al termodinamicii introduce un concept nou, entropia (care permite formularea unui criteriu cantitativ pentru sensul de desfășurare a proceselor naturale) prin relația:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

unde δQ reprezintă căldură reversibilă schimbată de sistem cu mediul exterior.

O deosebită importanță o are ideea lui Boltzmann de a lega entropia, care este un concept microscopic – de proprietățile microscopice ale sistemului. O stare macroscopică dată a unui sistem poate corespunde la un număr foarte mare de stări microscopice. Starea microscopică a unui sistem se schimbă neconștient în timp; de exemplu, starea microscopică a unui gaz se schimbă în timp datorită ciocnirilor moleculelor și redistribuirii vitezelor.

Numărul de stări microscopice care corespund stării de echilibru a sistemului este mult mai mare decât în orice altă stare de neechilibru.

Probabilitatea ca sistemul (izolat) să sufere schimbări însemnate este foarte mică. De exemplu, este foarte puțin probabilă schimbarea în urma căreia moleculele unui gaz s-ar aduna – de la sine – numai într-o jumătate din volumul ocupat de gaz. Starea în care moleculele ocupă întregul vas este mai puțin ordonată decât starea în care moleculele ocupă numai jumătate din vas.

Entropia stării unui sistem este o măsură cantitativă a gradului de dezordine al acelei stări, în sensul că starea cu cea mai mare dezordine este cea cu entropia mai mare. Entropia este o funcție de stare a unui sistem deoarece variația entropiei, la trecerea unui sistem dintr-o stare în alta, nu depinde de drumul urmat de sistem între cele două stări. Ea caracterizează sensul de desfășurare a proceselor în natură.

Pentru a găsi condiția de echilibru a unui sistem macroscopic este necesar să se considere legătura între descrierea stărilor macroscopice ale acestuia, adică între microstări și macrostări. Pentru simplitate se consideră un sistem compus dintr-un singur fel de particule, al căror număr este N .

În cazul unui sistem izolat în echilibru, o stare microscopică a sa este complet determinată de energia sa W , de volumul V ocupat de sistem și numărul de particule N din care este format sistemul. Dacă sistemul se află într-o stare de neechilibru, sunt necesare și alte mărimi macroscopice care determină forțele exterioare (de exemplu, intensitatea unui câmp electric ce acționează asupra sistemului). Aceste mărimi suplimentare se vor nota în cele ce urmează prin simbolul comun x , iar o macrostare este specificată prin (W, V, N, x) .

În cadrul fizicii clasice se consideră că microstările formează o mulțime infinită nenumărabilă (sau un continuum). Evaluarea numărului lor este dificilă.

Conform mecanicii cuantice, microstările nu formează un continuum, ci o mulțime discretă.

Numărul de microstări corespunzătoare unei macrostări determinate de parametrii W, V și x și care are energia cuprinsă în intervalul W și

$W + \delta W$ se numește ponderea statistică a stării macroscopice considerate sau probabilitate termodinamică și se va nota prin $\Omega(W, V, N, x)$. Toate microstările unui sistem izolat, compatibile cu anumite valori fixate ale mărimilor W, V, N sunt la fel de probabile. Din postulatul formulat anterior rezultă că probabilitatea ca un sistem să se afle într-o macrostare (W, V, N, x) este proporțională cu ponderea statistică $\Omega(W, V, N, x)$.

În ceea ce privește starea de echilibru a unui sistem – care corespunde unei anumite valori a lui x – se introduce un nou postulat: starea de echilibru corespunde la acea valoare a lui x pentru care ponderea statistică $\Omega(W, V, N, x)$ atinge valoarea maximă, parametrii W, V , și N fiind fixați.

În locul ponderii statistice este mai util să se introducă entropia ca o măsură a dezordinii unui sistem aflat într-o macrostare dată. Entropia unui sistem care se află în macrostarea (W, V, N, x) se definește prin relația lui Boltzmann:

$$S(W, V, N, x) = k \cdot \ln \Omega(W, V, N, x), \quad (5.22)$$

unde k este constanta lui Boltzmann.

Pe baza relației (5.22) poate formula principiul al doilea al termodinamicii cu ajutorul entropiei. Postulatul conform căruia ponderea statistică (probabilitatea termodinamică) a unui sistem izolat atinge valoarea maximă în starea de echilibru, poate fi enunțat și astfel: în timpul proceselor naturale, entropia unui sistem izolat crește, atingând valoarea maximă în starea de echilibru.

În cazul unui proces reversibil (ideal), sistemul izolat trece printr-un șir de stări de echilibru, astfel încât numărul de microstări corespunzător acestei macrostări rămâne neschimbat. Deci, în timpul proceselor reversibile, entropia unui sistem izolat rămâne constantă. Aceste concluzii pot fi exprimate prin relația:

$$\Delta S \geq 0, \quad (5.23)$$

unde, ΔS este variația entropiei sistemului izolat considerat în decursul unui proces, semnul „ \geq ” referindu-se la procesele naturale (ireversibile), iar semnul

egal la procesele reversibile (ideale). Relația (5.23) constituie legea entropiei, dar care reprezintă și cea mai generală formă a principiului al doilea al termodinamicii, dat pentru prima dată de Clausius prin introducerea entropiei pe cale empirică. Sensul fizic al entropiei a devenit mai clar numai după ce Boltzmann a legat entropia de ponderea statistică a stării.

Principiul al doilea al termodinamicii poate fi enunțat și sub forma imposibilității realizării unui perpetuum mobile de speța a doua, adică a unei mașini care ar funcționa pe seama energiei interne a unui singur rezervor termic. Spre deosebire de perpetuum mobile de speța întâi (care ar fi o mașină ce ar produce lucrul mecanic – și deci energie – „din nimic”) a cărui imposibilitate rezultă din legea conservării energiei, perpetuum mobile de speța a doua nu contrazice legea conservării energiei.

O analiză amănunțită a rezultatelor obținute anterior pe baza considerațiilor statistice scoate în evidență următoarele concluzii cu privire la limitele de aplicabilitate ale principiului al doilea.

În primul rând, aceste rezultate sunt obținute pe baza metodelor fizicii statisticii și a teoriei probabilităților. De aceea și rezultatul final $\Delta S \geq 0$ poartă un caracter probabilistic. Inegalitatea $\Delta S \geq 0$ arată că cea mai probabilă variație a entropiei unui sistem este creșterea sa.

Ca și toate celelalte rezultate ale fizicii statistice, al doilea principiu al termodinamicii este adevărat cu exactitate până la fluctuații. Fluctuațiile de densitate și de presiune sunt procese în care probabilitatea și entropia stării pot descrește.

În al doilea rând, nu are sens să se aplice legile fizicii statistice și în particular, principiul al doilea, $\Delta S \geq 0$, la un sistem nelimitat cum este Universul. O astfel de încercare a fost făcută de Clausius arătând că s-ar ajunge la așa-numita „moarte termică a Universului”.

Aplicații

5.7. Să se calculeze variația entropiei unui sistem izolat compus din două gaze perfecte în următoarele cazuri:

- a) gazele au temperaturi inițiale diferite, iar în final au aceeași temperatură;

b) gazele au inițial presiunile p_1 și p_2 , iar în final $p'_1 = p'_2 = p$.

Rezolvare:

a) Pentru $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1 \text{ kmol}$: $U = C_V \cdot T + U_0$

$$C_V T_1 + U_0 + C_V T_2 + U_0 = 2(C_V T_m + U_0) \Rightarrow T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$S = C_V \ln T + R \ln V + S_0$$

$$\text{Pentru : } V = \text{const} \Rightarrow \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{C_V \ln T_m}{T_1} + \frac{C_V \ln T_m}{T_2}$$

$$\Delta S = \frac{2C_V \ln T_m}{\sqrt{T_1 T_2}} = 2C_V \ln \left(\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \right) > 0$$

b) $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1 \text{ kmol}$; $T_1 = T_2 = T$; $p_1 \neq p_2$; $p_1 > p_2$;

$$p_1 V_1 = RT; p_1 V'_1 = RT \Rightarrow V'_1 = \frac{p_1 V_1}{p_f}$$

$$p_2 V_2 = RT; p_2 V'_2 = RT \Rightarrow V'_2 = \frac{p_2 V_2}{p_f}$$

$$V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2$$

$$p_f = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2RT}{V_1 + V_2} = \frac{2RT}{\frac{RT}{p_1} + \frac{RT}{p_2}}; p_f = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}$$

$$S = C_p \ln T - R \ln p + S_0$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -2R \ln p_f + R \ln p_1 + R \ln p_2$$

$$\Delta S = 2R \ln \left(\frac{p_1 + p_2}{2\sqrt{p_1 p_2}} \right) > 0$$

5.8. Să se calculeze variația de entropie a 3,2 g oxigen care se dilată izobar până la un volum triplu față de volumul inițial.

R: $\Delta S = 3,2 \text{ J/K}$.

5.4. Principiul al treilea al termodinamicii

Acest principiu arată că: *entropia oricărui sistem, la temperatura de zero absolut, este egală cu zero*. Această afirmație se poate exprima sub forma dată de Planck:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0 \quad (5.24)$$

Planck a arătat că teorema lui Nernst este strâns legată de teoria cuantică. Conform mecanicii cuantice, stările energetice sunt discrete și la zero absolut, sistemul se va afla în starea cuantică cu energia cea mai joasă (starea fundamentală). Aceasta înseamnă că la zero absolut este posibilă o singură microstare ($\Omega = 1$) și deci, $S = 0$. Faptul că energia este discretă nu înseamnă că micșorarea entropiei poate fi observată la temperaturi atinse pe cale experimentală, deoarece nivelele energetice ale sistemelor macroscopice sunt dispuse atât de aproape între ele, încât nu pot fi distinse în experiențele termodinamice.

Sistemul nu se află în starea cuantică cu energia cea mai joasă, nici la cea mai scăzută temperatură atinsă în experiențele de laborator.

Teorema lui Nernst poate fi legată de următorul principiu fenomenologic: nici un sistem nu poate fi răcit până la temperatura de zero absolut. Această consecință a teoremei lui Nernst poate fi luată drept o formulare a principiului al treilea al termodinamicii.

Aplicații

5.9. Să se calculeze variația entropiei unui sistem izolat compus din două gaze perfecte în următoarele cazuri:

a) gazele au temperaturi inițial diferite, iar în final au aceeași temperatură.

b) gazele au inițial presiunile p_1 și p_2 , iar în final $p'_1 = p'_2 = p$.

Rezolvare:

a) Pentru $v_1 = v_2 = 1 \text{ kmol}$; $U = C_v T + U_0$

$$C_v T_1 + U_0 + C_v T_2 + U_0 = 2(C_v T_m + U_0) \Rightarrow$$

$$T_m = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad S = C_v \ln T + R \ln V + S_0$$

$$\text{Pentru } V = \text{const.} \Rightarrow \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_v \ln \frac{T_m}{T_1} + C_v \ln \frac{T_m}{T_2}$$

$$\Delta S = 2C_v \ln \frac{T_m}{\sqrt{T_1 T_2}} = 2C_v \ln \left(\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \right) > 0$$

b) $v_1 = v_2 = 1 \text{ kmol}$; $T_1 = T_2 = T$; $p_1 \neq p_2$; $p_1 > p_2$.

$$T'_1 = T'_2 = T \quad (U = ct)$$

$$p_1 V_1 = RT; \quad p_f V'_1 = RT \Rightarrow V'_1 = \frac{p_1 V_1}{p_f}$$

$$p_2 V_2 = RT; \quad p_f V'_2 = RT \Rightarrow V'_2 = \frac{p_2 V_2}{p_f}$$

$$V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2 \Rightarrow p_f = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2RT}{V_1 + V_2} = \frac{2RT}{\frac{RT}{p_1} + \frac{RT}{p_2}} p_f = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}$$

$$S = C_p \ln T - R \ln p + S_o$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -2R \ln p_f + R \ln p_1 + R \ln p_2 = 2R \ln \left(\frac{\frac{p_1 + p_2}{2}}{\sqrt{p_1 p_2}} \right) > 0$$

5.10. Un gaz ideal suferă un proces izoterm la temperatura $t = 27^\circ\text{C}$. Să se determine variația entropiei gazului ideal în decursul acestui proces dacă variația energiei libere Helmholtz este $\Delta F = 600 \text{ J}$.

Rezolvare:

$$\Delta F = \Delta U - \Delta(TS) \rightarrow \Delta S = -2 \frac{J}{K}.$$

5.11. Să se determine variația energiei libere Helmholtz ΔF și a energiei libere Gibbs ΔG , pentru un kilomol de gaz ideal când este încălzit de la temperatura de 47°C la temperatura de 127°C . Volumul constant este de 5 l .

Rezolvare:

Se folosesc relațiile de definiție ale energiei libere Helmholtz,, respectiv Gibbs care se scriu sub formă de diferențe finite:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \Delta U - \Delta(TS) = \\ &= \theta C_v (T_2 - T_1) - \theta R (T_2 - T_1) \ln V - \theta C_v (T_2 \ln T_2 - T_1 \ln T_1) - (T_2 - T_1) S_0 - \\ &= 8,76 \cdot 10^7 - 80 S_0 \text{ J}. \end{aligned}$$

$$\Delta G = \Delta F + \Delta(pV) = \Delta F + V(p_2 - p_1) = \Delta F + V \frac{p_1}{T_1} (T_2 - T_1) =$$

$$= \Delta F + V \frac{\vartheta R}{\gamma} (T_2 - T_1) = \Delta F + \vartheta R (T_2 - T_1) = -8,69 \cdot 10^7 - 80 S_0 \text{ J}.$$

5.12. Să se determine energia liberă Helmholtz, F , entalpia, H și energia liberă Gibbs, G , pentru un mol de gaz ideal a cărui căldură molară la volum constant depinde de temperatură după legea $C_v = A + BT$, unde A și B sunt constante reale.

Rezolvare:

Variația elementară a energiei interne este dată de relația:

$$dU = \vartheta C_v dT = \vartheta (A + BT) dT$$

de unde prin integrare, se obține pentru energia liberă:

$$U = \vartheta AT + \frac{\vartheta B}{2} T^2 + U_0$$

Variația elementară a entropiei este dată de relația:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\vartheta (A + BT) dT + p dV}{T},$$

de unde, prin integrare, se obține pentru entropie:

$$S = \vartheta A \ln T + \vartheta BT + \vartheta R \ln V + S_0.$$

Expresiile pentru funcțiile termodinamice solicitate în problemă sunt:

- energia liberă Helmholtz:

$$F = U - TS = \vartheta AT + \frac{3}{2} \vartheta BT^2 - \vartheta AT \ln T - \vartheta RT \ln V + U_0 - TS_0.$$

- entalpia:

$$H = U + pV = \vartheta AT + \frac{\vartheta B}{2} T^2 + \vartheta RT + U_0.$$

- energia liberă Gibbs:

$$G = F + pV = \vartheta AT + \frac{3}{2} \vartheta BT^2 - \vartheta AT \ln T - \vartheta RT (\ln V - 1) + U_0 - TS_0.$$

5.13. Să se calculeze variația de entropie care se produce la încălzirea a 14g sodiu de la $t_1 = 37^\circ \text{C}$ la $t_3 = 700^\circ \text{C}$. Se cunosc temperatura de topire: $t_2 = 97,5^\circ \text{C}$, $c_{Na(s)} = 1184,6 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $t_2 = 97,5^\circ \text{C}$
 $c_{Na(l)} = 1339,5 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$, $\lambda_t = 113 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

TEST DE AUTOEVALUARE II

1. Un compresor, care a fost construit pentru a comprima adiabetic aerul ($\gamma_{\text{aer}} = \frac{7}{5}$), este utilizat pentru a comprima heliu ($\gamma_{\text{heliu}} = \frac{5}{3}$). În timpul comprimării, heliul în raport cu aerul :

- a) se încălzește;
- b) își menține temperatura;
- c) se răcește;
- d) își dublează temperatura;
- e) se răcește cu un grad;
- f) își menține constantă presiunea.

2. Două vase având volumele V_1 și V_2 conțin un gaz ideal la presiunea p și sunt legate printr-un tub de volum neglijabil. Inițial, cele două vase se află la aceeași temperatură T . Apoi, vasul V_1 se încălzește la temperatura $T_1 = 2T$ și ca urmare, raportul dintre presiunea finală a gazului și cea inițială este egal cu $\frac{8}{7}$. Raportul dintre volume $\frac{V_2}{V_1}$ are valoarea:

- a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 6.

3. Într-o butelie cu volumul $V = 2l$ se află oxigen la presiunea $p = 6 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$ și temperatura $t = 27^\circ C$. Dispozitivul atașat la capătul tubului lasă să se scurgă gazul cu un debit volumic constant la presiunea $p_1 = 1,2 \cdot \frac{10^5 N}{m^2}$. Tubul poate fi utilizat timp de 8 ore. Debitul de curgere al gazului este egal cu:

- a) $\frac{1l}{min}$; b) $\frac{2l}{min}$; c) $\frac{1l}{h}$; d) $\frac{2l}{h}$; e) $\frac{1l}{s}$; f) $\frac{2l}{s}$.

4. Un cilindru orizontal cu piston mobil conține la volumul $V = 5l$, o masă $m = 0,8 kg$ oxigen ($\mu_{O_2} = 32 \frac{kg}{kmol}$). Prin comprimare izotermă,

densitatea oxigenului crește cu $40 \frac{kg}{m^3}$. Temperatura mediului ambiant este $T = 320 K$. Volumul final al oxigenului din cilindru este egal cu:

- a) **1l**; b) **2l**; c) **2,5l**; d) **3l**; e) **3,5l**; f) **4l**.

5. Dintr-un balon cu volumul $V = 1l$ iese gaz la temperatura mediului înconjurător, care rămâne constant. Ca urmare presiunea gazului scade cu

$\Delta p = 55 \cdot \frac{10^3 N}{m^2}$, iar masa balonului cu gaz scade cu $\Delta m = 1g$. Densitatea

gazului la presiune normală este $p_0 = \frac{10^5 N}{m^2}$ și temperatura mediului înconjurător are valoarea:

- a) $1,70 \frac{kg}{m^3}$; b) $1,75 \frac{kg}{m^3}$; c) $1,82 \frac{kg}{m^3}$; d) $2 \frac{kg}{m^3}$; e) $2,5 \frac{kg}{m^3}$; f) $1 \frac{kg}{m^3}$.

6. Un mol de gaz, aflat la temperatura T_1 și volumul V_1 se destina după legea $T = aV - bV^2$. Lucrul mecanic efectuat de gaz pentru a-și dubla volumul $V_2 = nV_1$, cu $n = 2$, este egal cu:

- a) $RaV_1 - \frac{3}{2}RbV_1^2$;
 b) $2RaV_1 - \frac{1}{2}RbV_1^2$;
 c) $2RaV_1$;
 d) $2RbV_1^2$;
 e) $(a - 2b)RV_1^2$;
 f) $3RbV_1$.

7. Un calorimetru cu capacitatea calorică neglijabilă conține $m_1 = 500 g$ apă la temperatura $t_1 = 30^\circ C$, la care se adaugă $m_2 = 200 g$ gheață la temperatura $t_2 = -10^\circ C$

$\left(c_{ap\text{a}} = 4200 \frac{J}{kg \cdot K}, c_{ghe\text{a}\text{t}\text{a}} = 2100 \frac{J}{kgK}, \lambda_{ghe\text{a}\text{t}\text{a}} = 335 \frac{KJ}{kg} \right)$. În starea finală,

în calorimetru se mai găsește o masă de gheață egală cu:

- a) **0g**; b) **25 g**; c) **100 g**; d) **150 g**; e) **200 g**; f) **50 g**.

Soluțiile testului sunt la pagina 202.

MODULUL III

OBIECTIVELE MODULULUI III

- cunoașterea noțiunilor de bază ale fenomenelor electrice și magnetice;
- curentul electric continuu și alternativ;
- mișcarea unei particule încărcate electric în câmp magnetic;
- cunoașterea noțiunilor de bază ale fenomenelor electromagnetice;
- aplicații ale ecuațiilor Maxwell.

CONȚINUTUL MODULULUI III

6. ELECTROMAGNETISM.....	90
6.1. Electrostatica	90
6.1.1. Legea lui Gauss pentru medii omogene	90
6.2. Electrocinetica	98
6.3. Magnetostatica	100
Aplicații.....	103
6.4. Electromagnetism	107
Aplicații.....	111
Aplicații.....	115
TEST DE AUTOEVALUARE III.....	116

BIBLIOGRAFIE

1. Hotinceanu Mihai, Liana Șandru, Zoltan Borsos, *Electricitate și magnetism*, Ed. UPG, Ploiești, 2004.
2. Nicula Al., ș.a., – *Electricitate și magnetism*, E.D.P București, 1982.
3. Nicolau E., *Radiația electromagnetică*, Ed. Acad. 1973.
4. Liana Șandru, *Fizica*, E.D.P., București, 1994.
5. Liana Șandru, *Fizica*, Ed. U.P.G., Ploiești, 2005

MODULUL III

6. ELECTROMAGNETISM

6.1. Electrostatica

6.1.1. Legea lui Gauss pentru medii omogene

Se numește flux electric printr-o suprafață, o mărime numeric egală cu numărul liniilor de câmp care trec prin acea suprafață. Dacă se notează cu ψ_{S_0} fluxul electric care străbate normal suprafața S_0 în câmpul uniform de intensitate E , rezultă:

$$\psi_{S_0} = E \cdot S_0. \quad (6.1)$$

Pentru a calcula fluxul electric printr-o suprafață S așezată înclinat față de liniile de câmp (fig. 6.1) se proiectează S pe un plan perpendicular pe \vec{E} și se obține:

$$S_0 = S \cdot \cos \alpha.$$

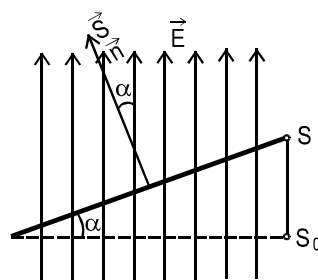


Figura 6.1

Fluxul electric prin S_0 este egal cu fluxul ce străbate suprafața S .

$$\psi_S = \psi_{S_0} = ES_0 = ES \cos \alpha \quad (6.2)$$

sau

$$\psi_S = \vec{E} \cdot \vec{S}, \quad (6.3)$$

unde: $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$; (\vec{n} — versorul normalei la suprafață).

În cazul în care câmpul electric este neuniform ($\vec{E} \neq \text{const.}$), fluxul electric elementar se definește prin relația:

$$d\psi = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (6.4)$$

în care $d\vec{S}$ este elementul de suprafață pe care \vec{E} poate fi considerat constant. Prin integrare se determină fluxul total:

$$\Psi_S = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E \cdot dS \cos \alpha. \quad (6.5)$$

Se consideră suprafața închisă S (fig. 6.2) în interiorul căreia, într-un punct oarecare P , se află o sarcină electrică Q . Cu centrul în P se construiește o sferă de rază r , astfel încât toate liniile de câmp ce pleacă de la sarcina Q străbat atât suprafața S_0 a sferei cât și suprafața S . În acest caz

$$\Psi_S = \Psi_{S_0} = \oiint_{S_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^3} \vec{r} \cdot \vec{n} dS_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^3} \oiint_{S_0} dS_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^3} S_0, \quad (6.6)$$

unde ϵ este permitivitatea mediului omogen în care se află sarcina Q .

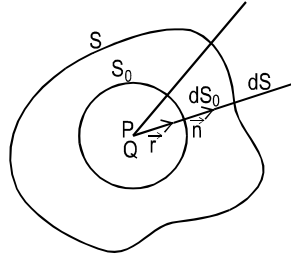


Figura 6.2

În relația (6.6.) suprafața $S_0 = 4\pi r^2$ și ca urmare rezultă:

$$\Psi = \frac{Q}{\epsilon}. \quad (6.7)$$

Liniile câmpului electrostatic sunt curbe deschise care pleacă de la sarcina pozitivă și se opresc pe sarcina negativă. Sarcina pozitivă ($Q > 0$) creează un flux pozitiv, $\Psi > 0$ iar sarcina negativă ($Q < 0$) creează un flux negativ $\Psi < 0$, prin S .

Fluxul elementar $d\Psi$ prin suprafața elementară deschisă $d\vec{S}$ (fig. 6.3 și fig. 6.3) este pozitiv dacă sensul liniilor de câmp este același cu al vectorului $d\vec{S}$ (care are sensul normalei la suprafață) și negativ dacă sensul liniilor de câmp este contrar sensului vectorului $d\vec{S}$.

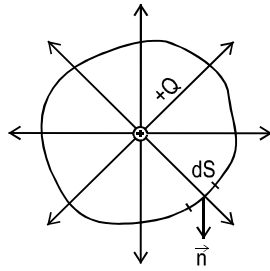


Figura 6.3

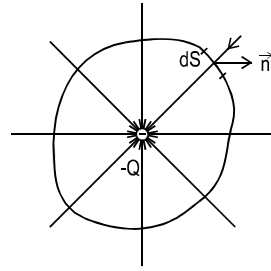


Figura 6.4

Pentru a determina fluxul electric printr-o suprafață închisă S , creat de o sarcină Q situată într-un punct P exterior (fig. 6.5), se construiește un con elementar cu vârful în P , care decupează pe suprafața S două clemente de suprafață dS și dS' . Fluxul electric prin dS este egal, în valoare absolută cu fluxul prin dS' . Dar, fluxul $d\psi$ este negativ, deoarece el străbate suprafața dS în sens contrar normalei \vec{n} și deci:

$$d\psi = -d\psi'$$

sau

$$d\psi + d\psi' = 0. \quad (6.8)$$

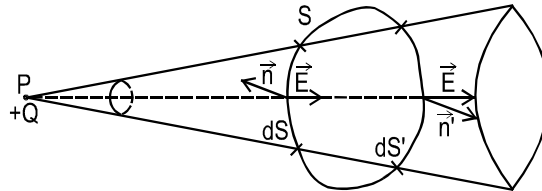


Figura 6.5

Întreaga suprafață S se poate considera ca fiind alcătuită din perechi de elemente de suprafață dS și dS' construite ca în figura 6.5. Prin fiecare pereche de suprafețe elementare, fluxul total este nul. Prin însumarea acestor fluxuri elementare se obține:

$$\psi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (6.9)$$

Fluxul total printr-o suprafață închisă este nul dacă sarcina care produce câmpul se află în exteriorul suprafeței.

Relațiile (6.7) și (6.9) exprimă legea lui Gauss. Fluxul electric printr-o suprafață închisă de formă arbitrară numeric este egal cu $1/\epsilon$, înmulțit cu suma algebrică Q a sarcinilor electrice aflate în interiorul suprafeței, este egal cu zero când Q este exterior acestei suprafețe.

Dacă sarcina Q este distribuită continuu în spațiu, se definește o densitate volumică ρ de sarcină:

$$\rho = \frac{dQ}{dV},$$

unde dQ este sarcina cuprinsă în elementul de volum dV . Sarcina electrică totală este:

$$Q = \iiint_V \rho dV.$$

În conformitate cu teorema Green-Ostrogradski, fluxul total satisface relația:

$$\Psi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \cdot dV. \quad (6.10)$$

Legea lui Gauss este:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \cdot dV = \frac{Q}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho dV, \quad (6.11)$$

iar forma locală a legii lui Gauss:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (6.12)$$

Semnificația fizică a divergenței este dată de densitatea volumică a sarcinilor electrice.

6.1.2. Vectorul inducție electrică

Pe fețele laterale ale dielectricului, introdus între armăturile condensatorului apar sarcinile legate de densități superficiale $\pm \sigma_p$ (fig. 6.6). Aceste sarcini produc în interiorul dielectricului un câmp electric, orientat în sens contrar câmpului produs de sarcinile libere de pe plăcile condensatorului.

Sarcina electrică distribuită uniform într-un strat subțire este numită distribuție superficială de sarcină. Se consideră o suprafață plană infinită cu o densitate superficială de sarcină. Se consideră o suprafață plană infinită cu o densitate superficială σ constantă. Din motive de simetrie și din condiția ca sarcinile din plan să fie statice, câmpul electric creat de plan are direcția normală la plan. Se consideră o suprafață gaussiană de formă cilindrică și de secțiune S , care intersectează perpendicular planul încărcat, (fig.6.6). Fluxul electric prin suprafața laterală a cilindrului este egal cu zero deoarece liniile de câmp sunt paralele cu această suprafață. Fluxul total este dat de fluxurile ψ_1 și ψ_2 , care străbat cele două baze S_1 și S_2 ale cilindrului.

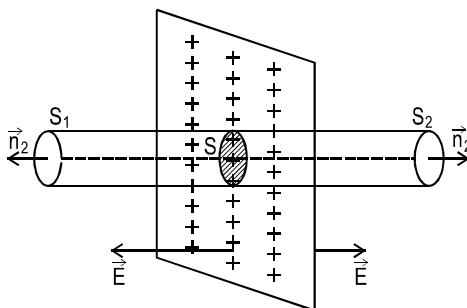


Figura 6.6

Pe fețele laterale ale dielectricului, introdus între armăturile condensatorului apar sarcinile legate de densități superficiale $\pm \sigma_p$. Aceste sarcini produc în interiorul dielectricului un câmp electric,

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}. \quad (6.13)$$

Câmpul electric total este:

$$E = E_0 - E_p = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0} \quad (6.14)$$

sau

$$\epsilon_0 E + \sigma_p = \sigma = \epsilon_0 E_0 = \epsilon E, \quad (6.15)$$

unde s-a ținut seama de relația (6.13) și din relația (6.15) rezultă:

$$\epsilon_0 E + P = \sigma. \quad (6.16)$$

Vectorul inducție (sau deplasare) electrică este:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} . \quad (6.17)$$

Din relațiile (6.15) și (6.17) se obține:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} . \quad (6.18)$$

Gradele de orientare și de polarizare ale moleculelor sunt proporționale cu intensitatea \vec{E} a câmpului din interiorul dielectricului și ca urmare, vectorul polarizare \vec{P} este proporțional cu vectorul câmp \vec{E} :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} . \quad (6.19)$$

Coeficientul χ se numește susceptivitate electrică și caracterizează mediul din punctul de vedere al gradului său de polarizare sub influența câmpului electric. Din relațiile (6.17), (6.18) și (6.19), se obține:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} (1 + \chi) = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} , \quad (6.20)$$

în care

$$\epsilon_r = 1 + \chi . \quad (6.21)$$

6.1.3. Energia câmpului electric

Lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea sarcinii Q de la una din plăcile condensatorului la cealaltă, în timpul procesului de încărcare a acestuia până când diferența de potențial dintre plăci devine $U = V_1 - V_2$, este măsura energiei condensatorului încărcat.

Între sarcina dQ și tensiunea dU dintre plăci există relația:

$$dQ = CdU . \quad (6.22)$$

Lucrul mecanic dL necesar pentru a transporta sarcina dQ de la o placă la cealaltă este:

$$dL = UdQ , \quad (6.23)$$

sau

$$dL = CUdU . \quad (6.24)$$

Energia condensatorului este:

$$W = L = C \int_0^U U dU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU . \quad (6.25)$$

Dacă în relația (6.25) se introduc expresiile:

$$U = Ed \quad (6.26)$$

și

$$Q/U = \epsilon S/d = C, \quad (6.27)$$

se obține:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S \cdot d. \quad (6.28)$$

Relația (6.28) exprimă energia condensatorului, în funcție de intensitatea câmpului electric E .

Câmpurile constante și sarcinile care le creează nu pot exista în mod independent. Câmpurile variabile în timp pot exista independent de sarcini și se propaga în spațiu sub formă de unde electromagnetice.

Experiența arată că undele electromagnetice transportă energie. Purtătorul energiei electrostatice se consideră că este câmpul electric. În relația (6.28), $V = Sd$ și ca urmare expresia se poate scrie sub forma:

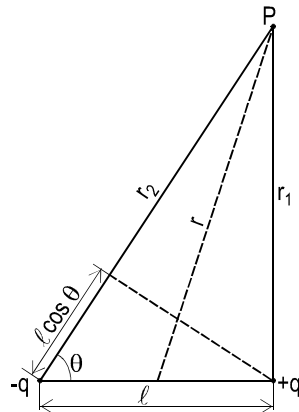
$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V. \quad (6.29)$$

Densitatea volumică de energie este:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}. \quad (6.30)$$

Aplicații

6.1. Să se calculeze potențialul creat de un dipol electric, într-un punct a cărui distanță r până la dipol este mare față de lungimea ℓ a dipolului.



Rezolvare:

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r_2 - r_1 = l \cos \theta$$

$$r_1 r_2 \cong r^2$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

6.2. Fie o sferă (în vid) cu raza R_0 și care conține o sarcină electrică q distribuită uniform cu densitatea superficială $\sigma = \frac{q}{4\pi R_0^2}$. Se cere intensitatea câmpului electric și potențialul electric într-un punct P_1 exterior sferei (situat la distanța R_1 de centrul sferei) și într-un punct P_2 interior sferei (situat la distanța R_2 de centrul sferei).

Aceeași întrebare dacă sarcina q este distribuită uniform în sfera de rază R_0 cu densitatea volumetrică de sarcină $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$.

Rezolvare:

Considerând o suprafață gaussiană de formă sferică cu raza R_1 și concentrică cu distribuție de sarcină, se poate scrie:

$$\Phi_e = \int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = E_1 \int_S d\vec{s} = E_1 \cdot 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma \cdot d\vec{s}}{R_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

Pentru un punct din interiorul sferei:

$$\Phi_i = \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow E_2 = 0$$

$$V_i = \int_{R_2}^{\infty} E_2 \cdot dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

Pentru distribuția volumetrică de sarcină se găsește:

$$\Phi_e = \int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = E_1 \cdot 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \rho \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_0^3}{R_1^2}$$

$$\Phi_i = \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = E_2 \cdot 4\pi R_2^2 = \frac{q'}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3}\pi R_2^3$$

$$E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2}{R_0^3}$$

6.3. O sferă cu centrul în O și de raza R este uniform încărcată electric cu o sarcină electrică de densitate volumică p . Să se calculeze câmpul în interiorul sferei într-un punct M aflat la distanța $r < R$. Să se calculeze potențialul $V(r)$ în aceleași condiții.

Se poate verifica rezultatul, pornind de la continuitatea lui V pentru $r = R$.

$$V(R) = \rho \frac{R^3}{3\epsilon_0} = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

6.2. Electrocinetica

6.2.1. Legea conservării sarcinilor electrice

Experiența arată că sarcina electrică este indestructibilă; ea nu poate fi creată sau distrusă; sarcinile electrice se pot deplasa doar dintr-un loc în altul, dar nu pot apare prin procese obișnuite. Sarcina se conservă.

Dacă există un curent net spre exteriorul unei suprafețe închise (suma curenților care ies din suprafață este mai mare decât suma celor care intră), cantitatea de sarcină din interior trebuie să descrească cu o valoare corespunzătoare.

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ_{\text{interior}}}{dt}, \quad (6.31)$$

în care, $Q_{\text{interior}} = \iiint_V \rho dV$, în care V este volumul (6.31).

În conformitate cu formula Green-Ostrogradski, relația $I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ devine:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{j} \cdot dV. \quad (6.32)$$

Din relația (6.31), $Q_{\text{int}} = \iiint \rho dV$ și $\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint \text{div} \vec{j} \cdot dV$ rezultă:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (6.33)$$

sau

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0. \quad (6.34)$$

Relația exprimă legea conservării sarcinilor electrice și poartă denumirea de ecuația de continuitate a liniilor vectorului densității de curent electric.

6.2.2. Legea lui Ohm pentru densitatea de curent

Mișcarea ordonată, dirijată a electronilor într-un conductor este cauzată de câmpul electric care acționează asupra fiecărui electron cu forța $\vec{F} = -e\vec{E}$. Diferența de potențial constantă produce într-un conductor un curent I constant.

Cauza acestui fenomen constă în faptul că în timp ce electronii se mișcă într-un metal ei se ciocnesc cu ionii pozitivi din rețeaua cristalină a metalului și le cedează energia cinetică acumulată în câmpul electric.

Densitatea de curent \vec{j} creată de electronii de concentrație N , ce se deplasează cu viteza medie \vec{v} , este:

$$\vec{j} = N(-e)\vec{v} = -N \cdot e \cdot \vec{v}. \quad (6.35)$$

Dacă se consideră că imediat după o ciocnire cu ionii rețelei cristaline, electronul are viteza mișcării ordonate : $\vec{v}_0 = 0$ iar apoi în timpul τ dintre două ciocniri dobândește, sub acțiunea câmpului \vec{E} , accelerația:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m},$$

viteza electronului în momentul începerii unei noi ciocniri, este:

$$\vec{v}_{\max} = \vec{a} \cdot \tau = -\frac{e\vec{E}}{m} \cdot \tau.$$

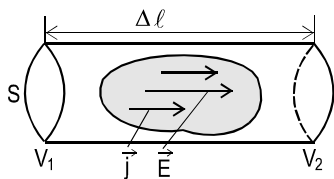


Figura 6.7.

Viteza mediu a mișcării ordonate este:

$$\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v}_0 + \vec{v}_{\max})$$

sau:

$$\vec{v} = -\frac{e\vec{E}\tau}{2m} = \mu \cdot \vec{E}, \quad (6.36)$$

unde μ se numește mobilitate.

Înlocuind relația (6.36.) în expresia (6.35.) se obține:

$$\vec{j} = \frac{e^2 N \tau}{2m} \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E}, \quad (6.37)$$

se numește conductivitate electrică. Ea crește cu concentrația electronilor de conducție și cu timpul dintre două ciocniri și scade cu masa purtătorilor de sarcină. Relația (6.37) se numește Legea lui Ohm pentru densitatea de curent sau forma locală (diferențială) a legii lui Ohm.

Din expresia (6.37) rezultă că densitatea de curent dintr-un punct dat al unui conductor este în mod unic determinată de intensitatea câmpului din același punct.

În punctele din mediul conductor unde acționează atât forțele electrice potențialele cât și cele imprimate, legea lui Ohm devine:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i). \quad (6.38)$$

6.3. Magnetostatica

Formula Biot-Savart-Laplace. Biot și Savart au constatat experimental că într-un punct P (fig. 6.8) situat la distanța r de un conductor rectiliniu, practic infinit de lung, parcurs de un curent I , apare un câmp magnetic:

$$H = \frac{I}{2\pi r}. \quad (6.39)$$

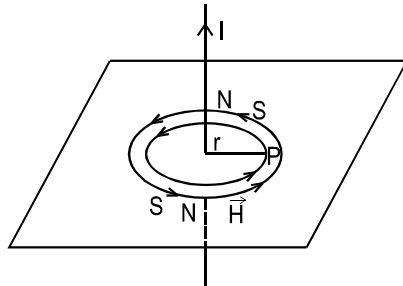


Figura 6.8

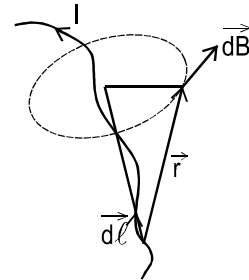


Figura 6.9

Laplace a generalizat această relație, arătând că un câmp magnetic creat de un curent ce străbate un conductor de o formă oarecare poate fi exprimat ca suma vectorială (superpoziția) a câmpurilor create de porțiunile elementare de conductor. Pentru câmpul magnetic creat de un element de conductor de lungime $d\vec{l}$ (fig. 6.9), respectiv, de un conductor de lungime l , Laplace a găsit formulele:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (6.40)$$

sau

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} . \quad (6.41)$$

unde $d\vec{l}$ este vectorul element de lungime a cărui direcție coincide cu cea a curentului I , iar \vec{r} este vectorul ce unește elementul de curent cu punctul în care se determină $d\vec{H}$ sau \vec{H} .

6.3.1. Legea circuitului magnetic

Prin analogie cu relația $\tau = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$ care definește tensiunea electromotoare, se poate introduce noțiunea de tensiune magnetomotoare, ca fiind circulația vectorului câmp magnetic de-a lungul unei curbe închise:

$$U_{\min} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} . \quad (6.42)$$

Se consideră într-un mediu omogen, având permeabilitatea magnetică absolută constantă, un contur C plan, de o formă oarecare, ce înconjură un conductor rectiliniu infinit, parcurs de curentul I (fig. 6.10). Liniile câmpului magnetic sunt cercuri concentrice în planul desenului.

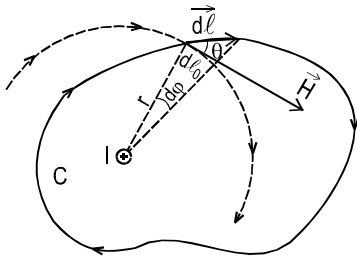


Figura 6.10

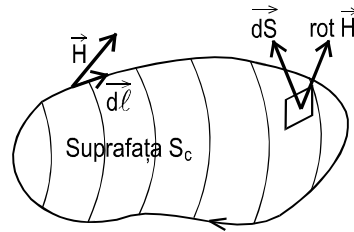


Figura 6.11

Convențional se alege sensul de parcurgere a curbei C în sensul acelor de ceasornic, adică același sens cu al liniilor de câmp magnetic. Din figura 6.10, se observă că: $\vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot dl \cdot \cos \theta = H \cdot dl_0 = H \cdot r \cdot d\varphi$.

Luând în considerare relația (6.39.), circulația vectorului \vec{H} pe conturul C este:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C H \cdot r \cdot d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\varphi = I \quad (6.43)$$

sau

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I. \quad (6.44)$$

Relațiile (6.43) și (6.52) exprimă legea circuitului magnetic sau legea lui Ampère. Circulația vectorului inducție magnetică de-a lungul unei curbe închise din jurul unui conductor parcurs de curent este proporțională cu intensitatea curentului respectiv.

Când curba C înconjură mai mulți conductori prin care trec curenții I_1, I_2, \dots, I_n , circulația lui \vec{H} este egală cu suma algebrică a curenților:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{k=1}^n \pm I_k.$$

Câmpul magnetic creat de curenți staționari este static, nu depinde de timp și se numește câmp magnetostatic.

Spre deosebire de circulația vectorului câmp electrostatic \vec{E} , care este nulă, circulația \vec{H} nu se anulează decât în cazul când conturul C nu cuprinde conductori parcurși de curent electric. Din relațiile $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ și (6.43) se obține:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (6.45)$$

Aplicând teorema lui Stokes primului termen al acestei relații, rezultă:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \iint_{S_C} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (6.46)$$

unde S_c este o suprafața care se sprijină pe conturul C . Din expresia (6.46) se obține:

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad (6.47)$$

Relația (6.47) exprimă forma diferențială a legii lui Ampère și pun în evidență caracterul rotațional al câmpului magnetic.

Fluxul inducției magnetice. Liniile de inducție magnetică se obțin dacă într-un câmp magnetic se trasează curbele care au ca tangentă, în fiecare punct vectorul inducției magnetice \vec{B} . Spre deosebire de liniile de inducție ale câmpului electrostatic, care pornesc și se termină pe sarcini, fiind linii deschise, liniile de inducție magnetică produse de curenți sunt curbe închise, adică nu există puncte din care aceste linii să poată diverge, adică:

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (6.48)$$

Relația (6.48) este adevărată chiar și pentru câmpuri magnetice dinamice.

Fluxul inducției magnetice sau fluxul magnetic printr-o suprafață S este:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (6.49)$$

În conformitate cu teorema Green-Ostrogradski și din relațiile (6.48) și (6.49) rezultă că fluxul magnetic printr-o suprafață închisă S este nul:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \int \int_V \text{div } \vec{B} \cdot dV = 0. \quad (6.50)$$

Din ecuațiile electrostaticii și magnetostaticii:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \end{cases}, \quad (6.51)$$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} \end{cases}, \quad (6.52)$$

rezultă că cele două câmpuri, electric și magnetic, nu sunt interconectate când sarcinile și curenții sunt statice.

Aplicații

6.4. Să se calculeze intensitatea curentului electric de conducție ce trece prin dielectricul imperfect al unui condensator: a) plan circular; b) cilindric. Se cunosc: conductanța σ a dielectricului dintre armături, tensiunea U dintre armături și mărimile fizice constructive ale condensatoarelor; d – distanța dintre armături, r – raza armăturilor plane circulare, razele r_1 și r_2 ale armăturilor cilindrice, l – lungimea generatoarei armăturilor cilindrice.

Rezolvare:

$$a) i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = J \cdot \pi r^2 = \sigma E \cdot \pi r^2 = \sigma \frac{U}{d} \pi r^2$$

$$b) i = \int_{Slat.} \vec{J} \cdot d\vec{S} = J \cdot 2\pi r l = \sigma E \cdot 2\pi r l$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr = \frac{i}{\sigma \cdot 2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{i}{\sigma \cdot 2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow i = \frac{2\pi \sigma l U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

6.5. Un fir de cupru cu secțiunea de 4mm^2 este parcurs de un curent $I = 2\text{A}$ tensiunea aplicata pe lungimea $l = 2\text{m}$ este $U = 80\text{mV}$. Se cere:

a) mobilitatea electronilor ,se consideră că toți atomii sunt transformați în ioni de Cu^{2+} ; b) rezistivitatea cuprului.

$$\text{Se dau: } \rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, A_{\text{Cu}} = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

6.3.2. Substanța în câmp magnetic

Orice substanță are proprietăți magnetice deoarece ea se polarizează magnetic sub acțiunea câmpului magnetic.

Acțiunea magnetică a unui corp polarizat magnetic se exprimă folosindu-se reprezentarea dată de Ampère pe baza echivalenței dintre curenți închiși elementari și dipolii magnetici, care consideră magnetismul ca fiind un fenomen produs de sarcinile electrice în mișcare.

Dacă se consideră un contur circular de diametru mic, parcurs de un curent staționar I , orientarea conturului în spațiu poate fi caracterizată prin direcția normalei pozitive \vec{n} la contur (fig. 6.12).

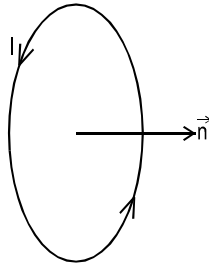


Figura 6.12

Acest contur se comportă ca un mic magnet, fiind numit dipol magnetic. Într-un câmp magnetic uniform \vec{B} , asupra dipolului magnetic acționează un cuplu de forțe \vec{F} , normala pozitivă \vec{n} orientându-se paralel cu direcția câmpului. Experimental s-a constatat că \vec{F} este proporțional cu curentul I din contur și cu aria S a conturului, dar nu depinde de forma conturului. Deci, momentul magnetic al dipolului se definește prin relația:

$$\vec{m} = I\vec{S} = I \cdot S \cdot \vec{n} . \quad (6.53)$$

Pentru a explica magnetizarea corpurilor se consideră că în atomii și moleculele substanțelor există curenți circulari elementari numiți curenți amperieni. Fiecare din acești curenți posedă un moment magnetic și creează în jur un câmp magnetic. Curenții amperieni sunt orientați haotic în absența unui câmp magnetic exterior și substanța în ansamblul ei nu generează câmp magnetic, momentul magnetic rezultat fiind zero.

Când substanța este introdusă într-un câmp magnetic exterior \vec{B}_0 , momentele magnetice ale moleculelor se orientează și deci, substanța capătă un moment magnetic și creează un câmp magnetic \vec{B}_m , care se suprapune peste câmpul \vec{B}_0 . Câmpul rezultat este:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m . \quad (6.54)$$

Magnetizarea substanțelor este caracterizată prin vectorul magnetizație \vec{M} a cărui mărime reprezintă momentul magnetic al unității de volum:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} = \frac{d\vec{m}}{dV} \quad (6.55)$$

sau prin vectorul polarizație magnetică:

$$\vec{J} = \mu_0 \vec{M} . \quad (6.56)$$

Legătura între \vec{B} , \vec{H} și \vec{M} poate fi găsită pe baza unor raționamente analoage celor folosite în electrostatică la deducerea relației dintre \vec{D} , \vec{E} și \vec{P} , cu deosebirea că în locul dipolilor electrici și a teoremei lui Gauss, în magnetism se folosesc dipolii magnetici ai curenților amperieni și teorema curentului magnetic, așa încât:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu \vec{H} . \quad (6.57)$$

Pentru câmpuri magnetice nu prea intense:

$$\vec{J} = \mu_0 \chi \vec{H} , \quad (6.58)$$

unde χ se numește susceptivitate magnetică.

Deoarece: $\mu = \mu_0 \mu_r$, din relațiile (6.57) și (6.58) rezultă

$$\mu_r = 1 + \chi . \quad (6.59)$$

Aplicații

6.6. Să se deducă expresia intensității câmpului magnetic în interiorul unui conductor de rază r , conductorul este parcurs de un curent electric cu intensitatea I .

Rezolvare: Fie $r_1 < r$ raza unei porțiuni circulare din interiorul conductorului concentrică cu cea a conductorului (figura 3.8). Intensitatea curentului electric prin această porțiune este

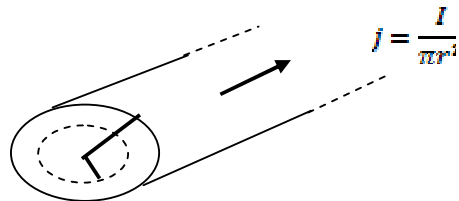


Fig.6.5.

$$I_1 = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot \pi r_1^2 = \frac{I}{\pi r^2} \cdot \pi r_1^2 = I \frac{r_1^2}{r^2}$$

Din teorema lui Ampère:

$$\int_{\Gamma} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = H_1 \cdot 2\pi r_1 = i_1 = I \frac{r_1^2}{r^2}$$

Rezultă:

$$H = I \frac{r_1}{2\pi r^2}.$$

6.7. Folosind legea lui Ampère să se afle câmpul magnetic de inducție în interiorul și exteriorul unui fir drept, lung, de rază R , prin care circulă un curent de densitate j .

$$\mathbf{R:} \quad B_{\text{int}} = \frac{\mu j r}{2}; \quad B_{\text{ext}} = \frac{\mu j R^2}{2r}$$

6.4. Electromagnetism

6.4.1. Energia câmpului magnetic

Se consideră o bobină de formă toroidală, formată din N spire și alimentată de o sursă care dă o tensiune electromotoare \mathcal{E} (fig. 6.13). Când se închide circuitul, intensitatea curentului crește de la valoarea zero până la valoarea I corespunzătoare regimului staționar, totodată crescând și intensitatea câmpului magnetic din interiorul bobinei. Spirele ei sunt suficient de dese astfel încât câmpul magnetic este concentrat în interiorul bobinei, în exterior fiind neglijabil.

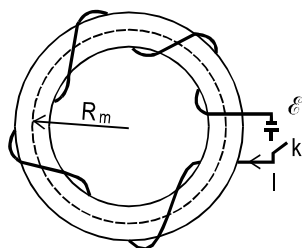


Figura 6.13

Energia electrică consumată de bobină în intervalul de timp dt , este:

$$dW = \varepsilon \cdot I \cdot dt . \quad (6.60)$$

Pe seama acestei energii se formează câmpul magnetic dH în interiorul bobinei. În timpul variației câmpului magnetic de la zero la valoarea H , în bobină apare o tensiune electromotoare de inducție, care în fiecare moment echilibrează tensiunea ε în acest caz

$$|\varepsilon_i| = \frac{d}{dt} |N\Phi_1| = \varepsilon , \quad (6.61)$$

unde Φ_1 , este fluxul ce străbate o singură spirală.

Dacă se notează cu l valoarea instantanee a curentului, atunci câmpul magnetic la un moment dat se determină pe baza legii lui Ampère:

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N \cdot I , \text{ de unde:}$$

$$I = \frac{Hl}{N} . \quad (6.62)$$

l - fiind lungimea conturului C (lungimea bobinei). Înlocuind expresiile (6.61) și (6.62) în relația (6.60.) se obține:

$$dW = N \frac{d\Phi_1}{dt} \frac{Hl}{N} dt = \mu_0 SIHdH = \mu_0 VHdH . \quad (6.63)$$

În relație, produsul $SI = V$, reprezintă volumul din interiorul bobinei în care este concentrat câmpul magnetic.

Prin integrarea relației (6.63), se obține:

$$\int_0^W dW = \mu_0 V \int_0^H HdH \Rightarrow W = 1/2 \mu_0 H^2 V ,$$

unde H reprezintă mărimea câmpului magnetic după stabilirea regimului staționar.

Densitatea de energie în volumul în care se găsește câmpul magnetic este:

$$w = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} BH \quad (6.64)$$

sau

$$w = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} . \quad (6.65)$$

6.4.2. Curentul de deplasare. Inducția magnetoelectrică

Pe baza datelor experimentale s-a admis ca o axiomă faptul că sarcina electrică se conservă. Ecuația de continuitate care exprimă legea conservării sarcinilor electrice este:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0 . \quad (6.66)$$

Ecuația (6.66) conduce la o dificultate care apare în calculul câmpurilor magnetice datorate curenților variabili în timp. Teoria matematică a câmpurilor vectoriale arată că vectorul \vec{B} este unic determinat prin ecuațiile:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 ; \quad (6.67)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} . \quad (6.68)$$

Dacă densitatea de curent \vec{j} satisface relația (6.68), ea trebuie să fie solenoidă, adică:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \quad (6.69)$$

și deci liniile de curent trebuie să fie linii închise. Această condiție este incompatibilă cu ecuația (6.66) pentru curenții nestaționari.

Paradoxul a fost rezolvat de Maxwell dând pentru densitatea de curent ecuația:

$$\rho = \operatorname{div} \vec{D} \quad (6.70)$$

care confirmă că densitatea de sarcină liberă este o măsură a divergenței inducției electrice și deci ecuația de continuitate (6.66) este:

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.71)$$

Prin urmare, în cazul curenților netaționari în legea lui Ampère trebuie să se considere curentul total care este constituit din doi curenți : \vec{j} care este curentul de conducție și $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ este curentul de deplasare.

În acest caz,

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.72)$$

Pentru a da sensul fizic al curentului de deplasare se consideră un condensator introdus în circuitul unui curent variabil (fig. 6.14).

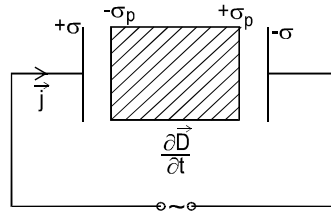


Figura 6.14

Într-un astfel de circuit curentul de deplasare este diferit de zero. Relația de definiție a vectorului inducție electrică este:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (6.73)$$

sau în funcție de relația $E = E_0 - E_p = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0}$,

$$\vec{D} = \epsilon_0 (\vec{E}_0 + \vec{E}_p) + \vec{P} \quad (6.74)$$

Pentru valorile absolute ale mărimilor fizice, ecuația (6.74.) devine:

$$D = \epsilon_0 E_0 - \epsilon_0 E_p + P \quad (6.75)$$

și deci curentul de deplasare are expresia:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E_0}{\partial t} - \epsilon_0 \frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \quad (6.76)$$

Termenul $\frac{\partial P}{\partial t}$ este numit curent de polarizare și se datorează deplasării sarcinilor electrice legate, în timpul variației polarizației dielectricului sub acțiunea câmpului electric variabil dintre plăcile condensatorului. Când se pune un dielectric într-un câmp electric variabil de frecvență înaltă, dipolii electrice ce compun dielectricul, rotindu-se după

câmpul variabil, se ciocnesc cu atomii vecini și cedează o parte din energia lor; dielectricul se încălzește. Acest fenomen se folosește în tehnică pentru încălzirea unui dielectric, simultan pe toată grosimea lui. Deoarece mărimea $\frac{\partial P}{\partial t}$ reprezintă viteza de deplasare a sarcinilor legate din dielectric, ei îi corespunde un câmp magnetic ce apare în spațiul înconjurător și care se poate calcula după legea Biot-Savart-Laplace. În absența diele

$$P = 0; \frac{\partial P}{\partial t} = 0; E_p = 0; \frac{\partial E_p}{\partial t} = 0 \quad (6.77)$$

Densitatea curentului de deplasare în vid este:

$$j_d = \epsilon_0 \frac{\partial E_0}{\partial t} \quad (6.78)$$

Condensatorul într-un circuit de curent alternativ nu întrerupe circuitul deoarece curentul variabil ce trece prin conductorii circuitului se continuă prin condensator sub forma curentului de deplasare. Acest lucru rezultă și din egalitatea:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = j \quad (6.79)$$

Curentul de deplasare în interiorul conductorilor este neglijabil de mic față de curentul de conducție. Curentul de deplasare în vid nu produce efecte termice, dar produce efecte magnetice ca orice deplasare de sarcini electrice.

Aplicații

6.10. Un electron intră într-un câmp magnetic uniform de inducție $B = 10^{-1} \text{ T}$, cu viteza $v = 9 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-1}$, care formează unghiul $\alpha = 30^\circ$ cu direcția câmpului. Să se calculeze: raza circumferinței rezultate din proiecția traiectoriei elicoidale pe un plan perpendicular pe direcția câmpului;

6.11. O ramă pătrată cu latura $a = 1 \text{ m}$ se mișcă cu o viteză constantă v în direcția perpendiculară pe un conductor liniar infinit aflat pe suprafața ramei paralel cu una din laturile sale. Să se afle viteza v .

R: $v = 100 \text{ m/s}$

6.12. Un condensator cu plăcile paralele, circulare de rază R , este conectat la un generator de curent alternativ. Sarcina q de pe plăci este $q = q_0 \cdot \sin \omega t$. Liniile câmpului magnetic indus datorat curentului de deplasare sunt cercuri concentrice cu axa de simetrie a condensatorului. Să se afle inducția câmpului magnetic în funcție de distanța față de axa de simetrie pentru cazurile: a) $r < R$; b) $r > R$; c) $r = R$.

$$\mathbf{R:} \quad \text{a) } B = \frac{1}{2S} \mu_0 r q_0 \omega \cdot \cos \omega t ;$$

$$\text{b) } B = \frac{1}{2S} \mu_0 \frac{R^2}{r} q_0 \omega \cdot \cos \omega t ;$$

$$\text{c) } B = \frac{1}{2S} \mu_0 r q_0 \omega \cdot \cos \omega t .$$

6.4.3. Câmp electrodinamic. Câmp electromagnetic

La mărirea fluxului magnetic care străbate aria limitată de un circuit închis, apare o tensiune electromotoare indusă E_i și deci un câmp electric \vec{E} , care satisfac egalitatea:

$$E_i = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} . \quad (6.80)$$

Când conturul C este constituit din dielectric, atunci fiecare element din el se polarizează datorită câmpului electric indus \vec{E} . Dacă circuitul C este deschis, atunci prin el nu circulă curent, dar ca rezultat al acțiunii câmpului indus \vec{E} , în circuit se produce o redistribuire a sarcinilor așa încât la capetele conductorului apar sarcini libere.

Maxwell generalizând aceste rezultate a ajuns la concluzia că în toate punctele spațiului, unde există câmp magnetic variabil în timp, apare un câmp electric, independent de faptul că există sau nu un conductor. Conturul conductor este util doar pentru a observa câmpul electric indus, care se numește câmp electrodinamic. Câmpul electrodinamic este rotațional, având liniile de câmp închise (fig. 6.15).

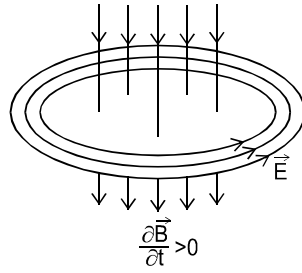


Figura 6.15

Din relația (6.80.) se obține:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S_c} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (6.81)$$

sau, aplicând teorema lui Stokes

$$\iint_{S_c} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (6.82)$$

de unde:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (6.83)$$

Această relație reprezintă forma locală a legii inducției electromagnetice și exprimă caracterul rotațional al câmpului electrodinamic.

Spațiul ocupat de un câmp electric variabil este, în același timp, ocupat și de un câmp magnetic variabil. Cele două câmpuri, electric și magnetic, sunt legate între ele și formează o unitate numită câmp electromagnetic.

6.4.4. Ecuațiile Maxwell

Pentru un mediu care nu este nici dielectric perfect nici conductor perfect, deci pentru un mediu în care există atât curent de conducție cât și curent de deplasare, ecuațiile lui Maxwell sunt:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (6.84)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (6.85)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho; \quad (6.86)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (6.87)$$

Relația (6.84) este legea Maxwell-Ampère a circuitului magnetic, expresia (6.85) reprezintă legea lui Faraday a inducției electromagnetice, relația (6.86) exprimă legea lui Gauss pentru fluxul electric, iar expresia (6.87) este legea lui Gauss pentru fluxul magnetic.

Formele integrale corespunzătoare acestor ecuații sunt:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_{S_C} \vec{D} \cdot d\vec{S}; \quad (6.88)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{S}; \quad (6.89)$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \iiint_{V_S} \rho \cdot dV; \quad (6.90)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (6.91)$$

Pentru determinarea câmpurilor electrice și magnetice, ecuațiile lui Maxwell se completează cu relațiile numite relații de material, impuse de polarizarea electrică și magnetică a corpurilor:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \quad (6.92)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}. \quad (6.93)$$

În medii cu polarizare liniară și fără polarizare spontană:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad (6.94)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} . \quad (6.95)$$

În plus, pentru medii conductoare se utilizează și legea lui Ohm:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i) . \quad (6.96)$$

Aplicații

6.13. Să se demonstreze legea conservării sarcinii electrice utilizând ecuațiile lui Maxwell.

Rezolvare:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ;$$

$$\nabla (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) ;$$

$$\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 .$$

6.14. Arătați că următorul câmp electromagnetic satisface ecuațiile lui Maxwell:

$$E_x=E_y=0 ; \quad E_z=\cos(y-c \cdot t); \quad B_y=B_z=0 ; \quad B_x=\frac{1}{c}\cos(y-c \cdot t)$$

$$\mathbf{R:} \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

TEST DE AUTOEVALUARE III

1. Trei corpuri punctiforme încărcate cu sarcinile electrice $q_1 = q_2 = q_3 = 2\mu C$ sunt așezate în vârfurile unui triunghi echilateral cu latura $a = 4\sqrt{3} \text{ cm}$. Intensitatea câmpului electric în centrul triunghiului are valoarea:

- a) 0; b) $2 \cdot \frac{10^3 V}{m}$; c) $5 \cdot \frac{10^3 V}{m}$; d) $9 \cdot \frac{10^3 V}{m}$; e) $\frac{10^4 V}{m}$; f) ∞ .

2. Două sfere mici conductoare, având aceleași dimensiuni, au sarcinile electrice $q_1 = 2\mu C$ și respectiv $q_2 = -4\mu C$. Se aduce o sferă cu aceleași dimensiuni, inițial neutră electric, în contact cu sfera 1 și apoi cu sfera 2. Se repetă operația de $n = 3$ ori. La sfârșitul operației, sarcina primei sfere este egală cu:

- a) $0,3\mu C$; b) $-0,5625\mu C$; c) $-0,6075\mu C$; d) $0,75\mu C$; e) $-0,80\mu C$; f) $0,6\mu C$.

3. Alegeți afirmația corectă, sarcina electrică este :

- a) o mărime vectorială;
b) o mărime cu o variație discontinuă;
c) o mărime cu o variație continuă;
d) sursa de câmp magnetic;
e) măsurată în volți;
f) egală cu intensitatea curentului în unitatea de timp.

4. Alegeți afirmația corectă:

- a) curentul electric într-un conductor este realizat de electroni legați în atomi;
b) prin aplicarea unui conductor a unui câmp electric se realizează un transport de electroni legați;
c) orice conductor în stare naturală este electrizat;
d) intensitatea curentului într-un circuit crește cu creșterea temperaturii rezistorului;
e) tensiunea electrică aplicată unui rezistor este invers proporțională cu rezistența acestuia;
f) rezistența electrică a unui conductor se dublează prin înjumătățirea ariei secțiunii acestuia.

5. Alegeți afirmația corectă. Diferența de potențial de la bornele unei surse dintr-un circuit electric este mai mare decât tensiunea electromotoare a sursei dacă:

- a) rezistența interioară a sursei este mai mare ca rezistența exterioară a circuitului;
b) rezistența internă a sursei este nulă;
c) intensitatea curentului prin sursă are sens opus celui al tensiunii electromotoare;
d) tensiunea electromotoare este de sens opus;
e) la scurt-circuit;

f) circuitul este deschis.

6. Alegeți afirmația corectă:

Forța electromagnetică este:

- a) egală cu produsul vectorial între $I\vec{l}$ și \vec{B} ;
- b) egală cu produsul scalar între $I\vec{l}$ și \vec{B} ;
- c) proporțională cu cosinusul unghiului dintre I și \vec{B} ;
- d) invers proporțional cu aria secțiunii conductorului;
- e) proporțională cu pătratul sarcinii electrice ce traversează secțiunea conductorului în unitatea de timp;
- f) paralelă cu vectorul inducție magnetic \vec{B} .

7. Alegeți afirmația corectă:

- a) egal cu produsul vectorial dintre vectorii \vec{B} și \vec{S} ;
- b) proporțional cu cosinusul unghiului dintre direcțiile vectorilor \vec{B} și \vec{S} ;
- c) maxim când vectorul inducție magnetic \vec{B} este paralel cu suprafața \vec{S} ;
- d) minim când vectorii \vec{B} și \vec{S} sunt paraleli;
- e) egal cu raportul modulelor vectorilor \vec{B} și \vec{S} ;
- f) independent de direcția vectorului inducție magnetic \vec{B} .

8. Alegeți afirmația corectă. Forța Lorentz:

- a) acționează asupra oricărui camp magnetic;
- b) este invers proporțională cu viteza particulei;
- c) este paralelă cu vectorul inducție magnetic;
- d) este independent de direcția vectorului \vec{B} ;
- e) imprimă o mișcare circulară unei particule încărcate electric a carui viteză este perpendiculară pe direcția vectorului inducție magnetic;
- f) este independentă de direcția vectorului viteză.

9. Alegeți afirmația corectă. Inducția electromagnetică este:

- a) proporțională cu intensitatea curentului;
- b) tangentă la liniile de camp;
- c) independentă de proprietățile magnetice ale mediului;
- d) fenomenul de producere a unei tensiuni electrice prin variația în timp a fluxului magnetic printr-o suprafață;
- e) fenomenul de producere a unui câmp magnetic variabil;
- f) fenomenul de producere a unei sarcini electrice.

10. Alegeți unitatea de măsură ce corespunde mărimii fizice, permeabilitatea magnetică:

- a) $\frac{J}{A^2}$; b) $\frac{N}{A^2 \cdot m}$; c) $\frac{Vs}{Am}$; d) $\frac{W}{A}$; e) $\frac{J}{AK}$; f) $\frac{N}{A}$.

Soluțiile testului sunt la pagina 202.

MODULUL IV. FIZICA MODERNĂ

OBIECTIVELE MODULULUI IV

- Cuantificarea energiei;
- Caracterul dual undă-corpusul al materiei;
- Fenomene legate emisia și absorbția energiei;
- Interacțiunea radiației cu substanța.

CONȚINUTUL MODULULUI IV

MODULUL IV. FIZICA MODERNĂ	121
7. BAZELE FIZICE ALE MECANICII CUANTICE.....	121
7.1. Natura corpusculară a radiației	121
Aplicații.....	124
7.2. Natura ondulatorie a particulelor	135
Aplicații.....	140
8. MECANICA CUANTICĂ	142
8.1. Postulate ale mecanicii cuantice	142
8.2. Momentul cinetic în mecanica cuantică.....	144
8.3. Ecuația lui Schrödinger pentru mișcarea nerelativistă.....	145
Aplicații.....	147
9. FIZICA ATOMULUI ȘI MOLECULEI	150
9.1. Serii spectrale	150
9.2. Atomul lui Bohr	151
9.3. Experiența Franck–Hertz. Insuficiențele teoriei lui Bohr	154
Aplicații.....	155
9.4. Atomul hidrogenoid	157
9.5. Atomii alcalini	158
9.6. Momentul magnetic orbital al electronului	159
9.7. Momentul cinetic propriu al electronului.....	162
9.8. Momentul vectorial al atomului	163
9.9. Structura fină a liniilor spectrale.....	166
Aplicații.....	167
9.10. Emisia și absorbția radiației.....	169
9.11. Radiația Röntgen.....	173
Aplicații.....	174
10. FIZICA SOLIDULUI.....	176
10.1. Defecte în rețea	179
Aplicații.....	183
10.2. Clasificarea solidelor în metale, semiconductori și izolatori.....	184
Aplicații.....	187
11. FIZICA NUCLEULUI ATOMIC	189
11.1. Energia de legătură a nucleului. Forțe nucleare.....	189
11.2. Spinul nuclear	191
11.3. Modele nucleare.....	191

11.4. Radioactivitatea. Legile emisiei nucleare	193
Aplicații	194
11.5. Interacțiunea radiațiilor nucleare cu substanța	194
11.6. Reacții nucleare	196
Aplicații	200
TEST DE AUTOEVALUARE IV	202

BIBLIOGRAFIE

1. Yavorsky B., Detlaf A. – *A modern handbook of physics*, Moscov, 1982.
2. Wichmann E. H. – *Physique quantique*, Libraire Armand Colin, Paris, 1974.
3. Tudose C. C.– *Fizica atomică și nucleară*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
4. Sirontin I, I., Saskolskaia – *Fizica cristalelor*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1981.
5. Landau et Lifchitz – *Mecanique quantique*, Editions Mir, Moscou, 1980.
6. Muscalu St. – *Fizica atomică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980.
7. Messiah A. – *Mecanică cuantică*, vol.I, II, Ed. Științifică, București, 1973.
8. Pop I., Niculescu V. – *Structura corpului solid*, Ed. Academiei, București, 1971.
9. Jeludev I. S. – *Simetria și aplicațiile ei*, Ed. Tehnică, București, 1979.
10. Chpolski E. – *Physique atomique*, Editions Mir, 1977.
11. Liana Șandru, *Fizica*, E.D.P., București, 1994.
12. Liana Șandru, *Fizica*, Ed. U.P.G., Ploiești, 2005.
13. Liana Șandru, Gavril Kovacs, *Structura și proprietățile materialelor vitroceramice din bazalt*, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2001.

MODULUL IV. FIZICA MODERNĂ

7. BAZELE FIZICE ALE MECANICII CUANTICE

Pentru exemplificarea fenomenelor legate de emisia și absorbția radiației, precum și interacțiunea sa cu substanța, trebuie să se admită cuantificarea energiei și caracterul dual undă-corpusul al materiei.

7.1. Natura corpusculară a radiației

Planck a deschis drumul fizicii cuantelor, considerând că emisia și absorbția are loc în mod discontinuu, prin particule cu energie cuantificată. Fenomenul fotoelectric și fenomenul Compton pot fi explicate dacă se consideră că lumina este de natură corpusculară.

Efectul fotoelectric. Fenomenul fotoelectric, pus în evidență de Hertz, constă în emisia de electroni, propusă de un metal pe care cade un flux de radiație electromagnetică cu frecvență mare. Studiul efectului fotoelectric se face cu ajutorul instalației prezentate în figura 7.1.

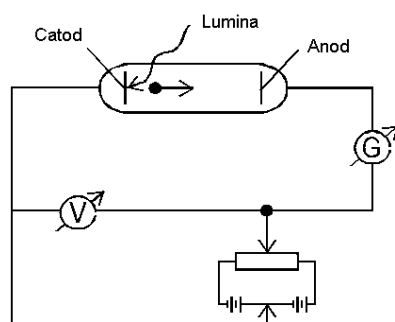


Figura 7.1

Electronii emiși de catod, sub influența luminii, ajung sub acțiunea câmpului electric la anod, formând un curent electric. Intensitatea curentului electric depinde de diferența de potențial U dintre electrozi, atingând valoarea de saturație când tensiunea U devine egală sau mai mare cu

discontinuitatea de potențial dintre cei doi electrozi și se anulează pentru o anumită valoare a tensiunii de întârziere U_b , numita tensiune de blocare (fig. 7.2).

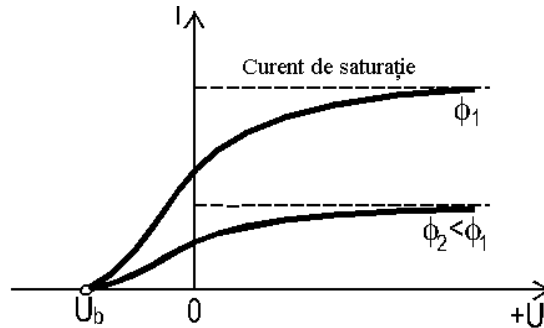


Figura 7.2

Legile efectului fotoelectric stabilite experimental sunt:

1. Intensitatea de saturație a curentului electric este proporțională cu fluxul de radiație incident.
2. Energia cinetică a electronilor variază liniar cu frecvența radiațiilor incidente, nedepinzând de intensitatea fluxului.
3. Fenomenul fotoelectric apare numai dacă radiația incidentă are frecvența ν egală sau mai mare decât o anumită valoare ν_p , numită frecvență de prag, caracteristică fiecărui metal în parte.
4. Fenomenul fotoelectric se produce practic instantaneu, intervalul de timp dintre acțiunea radiației și emisia electronilor fiind mai mic de 10^{-9} s.

Einstein a arătat că toate legile efectului fotoelectric se pot explica, dacă se presupune că radiația este discontinuă, fiind compusă din fotoni cu energia $h \cdot \nu$.

Fotonul în concepția lui Einstein, este o particula cu energie, masă și impuls. Energia fotonului este:

$$W = h \cdot \nu. \quad (7.1)$$

Conform teoriei relativității, viteza luminii în vid, deci și a fotonului, este invariantă la trecerea de la un referențial la altul. Fotonul nu are masă proprie sau de repaus, ca urmare $m_{0f} = 0$.

Impulsul fotonului rezultă din expresia:

$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad \text{când} \quad m_0 = 0, \Rightarrow p = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (7.2)$$

Einstein consideră că fotonii pătrund în metal și se ciocnesc cu electronii atomilor metalului. Energia fotonului absorbit de electron este folosită pentru părăsirea metalului, efectuându-se lucru mecanic de extracție W_e , iar restul este convertit în energia cinetică a electronului.

$$h\nu = W_e + \frac{mv^2}{2} = W_e + eU_b. \quad (7.3)$$

Efectul Compton. Experiențele lui Compton privitoare la difuzia X prin substanțe arată că în radiația difuzată există atât radiații având lungimea de undă inițială λ , cât și radiații cu lungimea de undă mai mare $\lambda_1 > \lambda$. Acest fenomen a fost studiat cu ajutorul instalației reprezentate schematic în figura 7.3. Deplasarea Compton nu depinde de lungimea de undă a radiației Röntgen incidente și de natura substanței, dar depinde de unghiul de difuzie θ . Conform teoriei fotonice a radiației, difuzia razelor X poate fi înțeleasă ca o ciocnire elastică a fotonilor incidenți cu electronii substanței difuzate, considerați inițial practic în repaus (fig. 7.4).

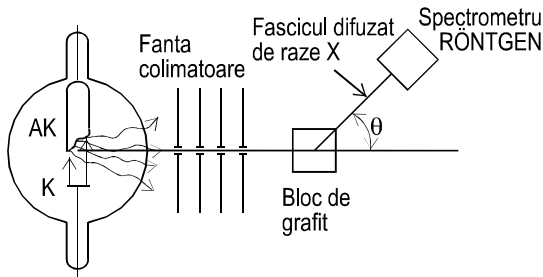


Figura 7.3

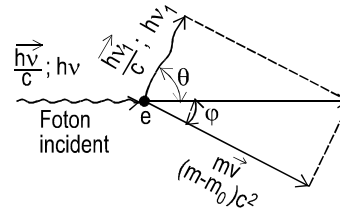


Figura 7.4

Aplicând legile de conservare ale impulsului și energiei se obține:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu_1}{c} + m\vec{v}, \quad (7.4)$$

unde m_0 este masa de repaus a electronului, m este masa lui de mișcare, iar

$\frac{\vec{h\nu}}{c}$ și $\frac{\vec{h\nu_1}}{c}$ sunt impulsurile fotonului, înainte și după ciocnire.

Înlocuind relația relativista a masei în relațiile (7.4), rezultă:

$$\frac{\vec{h\nu}}{c} - \frac{\vec{h\nu_1}}{c} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad (7.5)$$

$$h\nu - h\nu_1 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{1-v^2/c^2} - 1 \right).$$

Ridicând la pătrat relațiile (7.5), ținând cont că prima este o ecuație vectorială și scăzând din a doua pe prima, se obține:

$$\frac{c(\nu - \nu_1)}{\nu \cdot \nu_1} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta). \quad (7.6)$$

Dacă în relația (7.6) se introduce pentru $\nu = c/\lambda$, iar $\nu_1 = c/\lambda_1$, se obține expresia:

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (7.7)$$

unde: $\Lambda = 2,42 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,0242 \text{ \AA}$, se numește lungimea de undă Compton a particulei-țintă.

Aplicații

7.1. Pragul fotoelectric al unui fotocatod din cesiu este situat la lungimea de undă $\lambda_{\text{prag}} = 650 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. Se dirijează pe fotocatod un fascicul de lumină monocromatică de lungimea de undă $\lambda = 500 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. și puterea $P = 1 \text{ W}$. Să se calculeze: a) energia cinetică maximă a fotoelectronilor emiși și să se compare viteza lor cu viteza c a luminii; b) lungimea de undă asociată acestor electroni în funcție de energia lor cinetică. c) Care este randamentul cuantic al fotocatodului, știind că fotocurentul are valoarea $I = 16,1 \cdot 10^{-3} \text{ A}$.

Rezolvare:

$$\text{a) } h\nu = h\nu_0 + E_c \Rightarrow E_c = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = 9,1 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

$$\text{b) } v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_0}} = 4,4 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\frac{v}{c} = 1,4 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0 E_c}} = 1,62 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$c). \eta = \frac{n}{N} = \frac{It h \nu}{e P t} = \frac{I h c}{e P \lambda} = 122,9 \cdot 10^{-4}$$

7.2. Să se calculeze lungimea de undă și impulsul unui foton a cărui energie este egală cu energia de repaus a electronului.

Rezolvare:

Se utilizează relația lui Louis de Broglie pentru determinarea lungimii de undă asociată fotonului a cărui energie este egală cu energia de repaus a electronului.

$$\varepsilon = h \nu = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{hc}{\varepsilon} = \frac{hc}{m_0 c^2} = \Lambda = 2,43 \cdot 10^{-12} m$$

Impulsul fotonului este:

$$p = \frac{h}{\lambda} = 2,74 \cdot 10^{-22} kg \cdot m / s$$

7.3. Să se determine lungimea de undă de Broglie pentru un electron, pentru un proton și pentru o particulă α , nerelativiste, accelerate de o diferență de potențial $U = 800V$.

Rezolvare:

Lungimea de undă dată de relația lui Louis de Broglie este:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mqU}}$$

Lungimile de undă ale particulelor sunt:

- electron: $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = 43,41 \cdot 10^{-12} m;$
- proton: $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_p eU}} = 1,01 \cdot 10^{-12} m;$
- particula α : $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_\alpha 2eU}} = 0,51 \cdot 10^{-12} m$

7.4. Să se calculeze raportul lungimilor de undă asociate particulelor nerelativiste cu masele m_1 și m_2 dacă au aceeași energie cinetică, nu aceeași viteză.

Rezolvare:

Raportul lungimilor de undă asociate particulelor este:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{h}{p_1}}{\frac{h}{p_2}} = \frac{\frac{h}{\sqrt{2m_1\mathcal{E}_c}}}{\frac{h}{\sqrt{2m_2\mathcal{E}_c}}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

7.5. Să se găsească expresia lungimii de undă a unei asociate în funcție de factorul relativist $\gamma = \frac{m}{m_0}$.

Rezolvare:

Dacă:

$$\lambda = \frac{h}{p} \text{ și } m = \gamma m_0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{h}{\gamma \cdot m_0 v}$$

Dar:

$$\gamma = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

$$v^2 = c^2 - \frac{c^2}{\gamma^2} = \frac{c^2}{\gamma^2} (\gamma^2 - 1)$$

$$v = \frac{c}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\gamma \cdot m_0 \frac{c}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{h}{m_0 c \sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

7.6. O particulă cu masa de repaus m_0 și cu sarcina q este accelerată pornind din repaus de tensiunea electrică U . Să se stabilească expresia lungimii de undă a unei asociate în funcție de tensiunea electrică U dacă particula are mișcare relativistă.

Rezolvare:

Energia totală a particulei relativiste este:

$$\mathcal{E} = mc^2 = m_0 c^2 + \mathcal{E}_c = m_0 c^2 + qU$$

$$\gamma = \frac{m}{m_0} = \frac{mc^2}{m_0 c^2} = 1 + \frac{qU}{m_0 c^2}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 c \sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{h}{m_0 c \sqrt{\frac{2qU}{m_0 c^2} \left(1 + \frac{qU}{2m_0 c^2}\right)}}$$

este în conformitate cu rezultatul problemei precedente.

7.7. Un proton, în repaus, este accelerat de diferența de potențial $U = 400V$. Să se calculeze lungimea de undă asociată atât pentru cazul nerelativist, λ_0 , cât și pentru cazul relativist, λ . Ce concluzie se desprinde?

Rezolvare:

$$\lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2m_p qU}} = \frac{h}{\sqrt{2m_p q}} \frac{1}{\sqrt{U}} = 1,433 \cdot 10^{-12} m$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 c \sqrt{\frac{2qU}{m_0 c^2} \left(1 + \frac{qU}{2m_0 c^2}\right)}} = 1,553 \cdot 10^{-12} m$$

Comparând cele două rezultate, λ_0 și λ , observăm că diferă foarte puțin. În concluzie, la 400V, protonul nu devine relativist.

7.8. Un electron nerelativist este antrenat într-o mișcare circulară de rază $R = 2cm$ într-un câmp magnetic de inducție $B = 1mT$ perpendicular pe planul traiectoriei. Să se determine lungimea de undă de Broglie asociată electronului.

Rezolvare:

Se scrie bilanțul forțelor sub acțiunea cărora electronul este antrenat pe o traiectorie circulară de rază R :

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \rightarrow v = \frac{qBR}{m}$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{qBR} = 2,07 \cdot 10^{-10} m$$

7.9. Să se arate că unda asociată unei particule relativiste de masă de repaus m_0 și energie cinetică \mathcal{E}_c are lungimea de undă:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0} \sqrt{\mathcal{E}_c \left(\frac{\mathcal{E}_c}{2m_0 c^2} + 1 \right)}}$$

Rezolvare:

Relația dintre energia totală și impuls pentru o particulă relativistă este:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

Pe de altă parte :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + m_0 c^2$$

Din egalitatea ambelor relații ridicate la pătrat se obține:

$$(\mathcal{E}_c + m_0 c^2)^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$\mathcal{E}_c^2 + 2\mathcal{E}_c m_0 c^2 + m_0^2 c^4 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$\mathcal{E}_c (\mathcal{E}_c + 2m_0 c^2) = p^2 c^2$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}_c (\mathcal{E}_c + 2m_0 c^2)}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{\mathcal{E}_c (\mathcal{E}_c + 2m_0 c^2)}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_c \left(\frac{\mathcal{E}_c}{2m_0 c^2} + 1 \right)}}$$

7.10. Să se determine lucrul de extracție al electronilor dintr-o placă de litiu știind că lungimea de undă de prag este $\lambda_p = 450nm$.

Rezolvare:

Din relația lui Einstein pentru bilanțul energetic al efectului fotoelectric:

$$h\nu = L_e + \mathcal{E}_c = L_e + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Unde se impune $v = 0$ și se obține:

$$L_e = h\nu_p = \frac{hc}{\lambda_p} = 2,761 \text{ eV}.$$

7.11. Asupra catodului unei fotocelule se trimite un fascicul de lumină monocromatică de lungime de undă $\lambda = 500nm$. Diferența de potențial ce anulează curentul este $U = 0,80V$. Să se calculeze lucrul de extracție pentru materialul catodului.

Rezolvare:

Din relația lui Einstein pentru bilanțul energetic al efectului fotoelectric:

$$h\nu = L_e + \mathcal{E}_c = L_e + \frac{1}{2} m_0 v^2 = L_e + qU$$

obținându-se:

$$L_e = \frac{hc}{\lambda} - qU = 1,685 \text{ eV}.$$

7.12. Lungimea de undă de prag pentru cesiu este $\lambda_p = 520nm$. Să se determine viteza maximă a electronilor rezultați prin iradierea unei plăci de cesiu cu radiație monocromatică de lungime de undă $\lambda = 450nm$.

Rezolvare:

Din relația lui Einstein pentru bilanțul energetic al electronilor:

$$h\nu = L_e + \varepsilon_c = L_e + \frac{1}{2}m_0v^2,$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_p} + \frac{1}{2}m_0v^2,$$

se obține:

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m_0} \frac{\lambda_p - \lambda}{\lambda_p \lambda}} = 3,615 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

7.13. Iluminând catodul unei fotocelule, succesiv, cu lumină de lungime de undă $\lambda_1 = 350\text{nm}$ și $\lambda_2 = 590\text{nm}$ s-a găsit că vitezele maxime corespunzătoare fotoelectronilor diferă de $n=2,5$ ori. Să se determine lucrul de extracție al metalului catodului.

Rezolvare:

Sistemul de două ecuații necunoscute este:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = L_e + \frac{1}{2}m_0n^2v^2$$

$$\frac{hc}{\lambda_2} = L_e + \frac{1}{2}m_0v^2$$

Din a doua ecuație se exprimă:

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{hc}{\lambda_2} - L_e,$$

Înlocuind în prima ecuație a sistemului se obține:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = L_e + n^2 \left(\frac{hc}{\lambda_2} - L_e \right),$$

În urma prelucrării relației se obține:

$$L_e(n^2 - 1) = hc \left(\frac{n^2}{\lambda_2} - \lambda_1 \right) = \frac{hc}{\lambda_2} (n^2 - \lambda_2 \lambda_1),$$

$$L_e = \frac{hc}{\lambda_2} \cdot \frac{n^2 - \lambda_2 \lambda_1}{n^2 - 1} = 1,83 \text{ eV}.$$

7.14. Să se compare variațiile maxime ale lungimii de undă Compton pentru împrăștierea fotonilor pe electroni liberi, respective pe protoni.

Rezolvare:

Variația lungimii de undă $\Delta\lambda$ a unui foton la împrăștierea acestuia pe o particulă de masă m este:

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Variația maximă a lungimii de undă Compton pentru împrăștierea fotonilor pe electroni liberi este pentru unghiul de împrăștiere $\theta = \pi$:

$$\Delta\lambda_e = 2 \frac{h}{m_e c} = 2\Lambda = 0,0484 \cdot 10^{-10} m$$

Pentru proton se obține:

$$\Delta\lambda_p = 2 \frac{h}{m_p c} = 0,412 \cdot 10^{-15} m.$$

7.15. Care este valoarea energiei cinetice a unui electron a cărui lungime de undă de Broglie, λ_B , este egală cu o treime din lungimea de undă Compton a sa, λ_C .

Rezolvare:

Lungimea de undă Compton, Λ_C , a electronului este dată de relația:

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 c} = 2,42 pm.$$

Impulsul electronului este dat de relația:

$$p = \frac{h}{\Lambda_B} = \frac{h}{\frac{\Lambda_C}{3}} = 3m_0 c.$$

Considerând electronul ca particulă relativistă:

$$\varepsilon_c = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 v$$

$$p^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2 v^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}$$

$$\varepsilon_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}}} - m_0 c^2 = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2$$

$$\varepsilon_c = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2 = (\sqrt{10} - 1) m_0 c^2 = 1,10 MeV$$

7.16. Un foton cu energia 0,51 MeV suferă o împrăștiere Compton în direcția $\theta = \frac{\pi}{2}$ față de direcția incidentă. Să se calculeze energia fotonului difuzat și energia electronului de recul.

Rezolvare:

Variația lungimii de undă a fotonului difuzat este:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0,$$

de unde se obține:

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

Energia fotonului după interacțiunea cu electronul este:

$$\begin{aligned}\varepsilon = h\nu &= \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0 + \frac{hc}{m_0}(1 - \cos\theta)} = \\ &= \frac{hc}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{hc}{m_0 c^2 \lambda_0}(1 - \cos\theta)} = h\nu_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)} = 0,255 \text{ MeV}\end{aligned}$$

Energia cinetică a electronului de recul este:

$$\varepsilon_c = mc^2 - m_0 c^2 = h\nu_0 - h\nu = 0,255 \text{ MeV}$$

7.17. Cât din energia fotonului incident îi revine electronului Compton de recul dacă fotonul incident are energia 0,275 MeV, iar fotonul împrăștiat face unghiul $\theta = 5\pi/6$ cu direcția incidentă?

Rezolvare:

Proporția dintre energia fotonului incident ce o regăsim sub formă de energie cinetică a electronului de recul este dată de relația:

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_c}{h\nu_0} &= \frac{h\nu_0 - h\nu}{h\nu_0} = 1 - \frac{h\nu}{h\nu_0} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)} \\ \frac{\varepsilon_c}{h\nu_0} &= \frac{\frac{h\nu_0}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)} = 50,15\%\end{aligned}$$

7.18. Să se calculeze variația lungimii de undă, $\Delta\lambda$, pentru fotonul incident și unghiul sub care este difuzat acesta dacă fotonul incident avea lungimea de undă $\lambda_0 = 2,42 \text{ pm}$, iar viteza relativă a electronului de recul este $\beta = 0,5$.

Rezolvare:

Energia cinetică a electronului de recul, ce se deplasează cu viteza relativă β este:

$$\varepsilon_c = h\nu_0 - h\nu = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Pe de altă parte:

$$h\nu_0 - h\nu = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{hc}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}}$$

Egalând membrii din dreapta a ecuațiilor de mai sus, se obține:

$$1 + \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{h}{m_0c\lambda_0} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1},$$

de unde rearanjând termenii, rezultă:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\Lambda} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = 1,61 pm.$$

$$\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\Delta\lambda}{2\Lambda}}$$

Se obține pentru valoarea θ :

$$\theta = \arcsin \sqrt{\frac{\Delta\lambda}{2\Lambda}} = 70^\circ 26'.$$

7.19. Să se calculeze unghiul dintre direcția în care este difuzat fotonul Compton și direcția în care este împrăștiat electronul de recul știind că $\Delta\lambda = 1,815 pm$, iar fotonul incident are lungimea de undă $\lambda_0 = 3,63 pm$.

Rezolvare:

Din expresia ce ne furnizează variația lungimii de undă a fotonului în funcție de unghiul de împrăștiere, se calculează acest unghi:

$$\theta = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\Delta\lambda}{2\Lambda}} = 75^\circ 30'$$

Unghiul sub care este împrăștiat electronul de recul este:

$$\varphi = \arctg \left(\frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}} \right) = 37^\circ 45'$$

Unghiul α dintre cele două direcții este:

$$\alpha = \theta + \varphi = 113^\circ 15'.$$

7.20. Radiația X cu energia $h\nu_0$ suferă împrăștiere Compton pe electroni liberi. Să se stabilească expresia energiei maxime a electronilor de recul.

Rezolvare:

Variația lungimii de undă a fotonilor incideți:

$$\Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos\theta)$$

este maximă pentru unghiul de împrăștiere $\theta = \pi$ pentru care $\Delta\lambda = 2\Lambda$.

Energia maximă a electronilor de recul are relația:

$$\varepsilon_{c\max} = \frac{hc}{\lambda_0} \cdot \frac{2\Lambda}{\lambda + 2\Lambda}.$$

7.21. Ca rezultat al împrăștierii Compton a radiației X cu energia $7,5keV$, lungimea de undă acesteia variază cu 40%. Să se calculeze energia electronilor Compton de recul.

Rezolvare:

$$\begin{aligned}\varepsilon_c &= \frac{hc}{\lambda_0} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = h\nu_0 \frac{\eta\lambda}{\lambda + \eta\lambda_0} = \\ &= h\nu_0 \frac{\eta}{1 + \eta} = 2,14keV.\end{aligned}$$

7.22. Să se exprime variația energiei fotonului Compton în funcție de energia lui inițială și finală.

Rezolvare:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon &= \varepsilon_0 - \varepsilon = h\nu_0 - h\nu = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = hc \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0\lambda} = \\ &= \frac{hc}{\lambda_0\lambda} \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\theta) = \frac{h^2}{m_0\lambda_0\lambda} (1 - \cos\theta) = \\ &= \frac{h^2\nu_0\nu}{m_0c^2} (1 - \cos\theta) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{m_0c^2} (1 - \cos\theta).\end{aligned}$$

7.23. În urma împrăștierii Compton a unui foton pe un electron, aflat inițial în repaus ($\varepsilon_0 = 0,511MeV$), fotonul este deviat sub unghiul $\theta = \frac{\pi}{3}$ față de direcția inițială, iar electronul de recul este deviat sub unghiul φ față de aceeași direcție. Știind că după împrăștiere electronul are energia cinetică $\varepsilon_c = 0,511MeV$ să se determine energia fotonului incident și unghiul φ .

Rezolvare:

Se utilizează relația ce furnizează variația lungimii de undă a fotonilor incidenți:

$$\Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos\theta) = \frac{\Lambda}{2} = \frac{h}{2m_0c}.$$

și se obține pentru energia cinetică a electronilor de recul, expresia:

$$\varepsilon_c = h\nu_0 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda + \lambda_0} = \frac{hc}{\lambda_0} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda + \lambda_0}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{\frac{\lambda}{\lambda_0} - \cos\theta}.$$

Se obține:

$$h\nu_0 = 2\varepsilon_c = 1,022\text{MeV}.$$

$$\varphi = 30^\circ.$$

7.24. Un foton cu energia egală cu energia de repaus a electronului, suferă o ciocnire frontală Compton cu un electron relativist. După ciocnire fotonul emergent este difuzat sub unghiul $\theta = \frac{\pi}{4}$, iar electronul se oprește. Să se determine deplasarea Compton a lungimii de undă a fotonului, energia cinetică ε_c și viteza v a electronului înainte de ciocnire.

Rezolvare:

Valoarea inițială a lungimii de undă λ_0 este:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{h\nu_0} = \frac{hc}{m_0c^2} = \frac{h}{m_0c} = \Lambda = 2,42\text{pm}$$

$$\lambda = \lambda_0 - 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2,066\text{pm}$$

$$\Delta\lambda = 0,354\text{pm}.$$

Energia cinetică a electronului o determinăm din ecuația de conservare a energiei în ciocnirea considerată.

$$\varepsilon_c = mc^2 - m_0c^2 = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) = hc \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0\lambda}.$$

$$\varepsilon_c = 87,96\text{keV}.$$

Pentru determinarea vitezei:

$$\varepsilon_c = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$1 + \frac{\mathcal{E}_c}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^4}{(\mathcal{E}_c + m_0 c^2)^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{(\mathcal{E}_c + m_0 c^2)^2}$$

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{(\mathcal{E}_c + m_0 c^2)^2}} = 1,565 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

7.25. Pragul fotoelectric al unui fotocatod din cesiu este situat la $\lambda = 600 \text{ nm}$. Se dirijează pe fotocatod un fascicul de lumina monocromatică cu $\lambda = 550 \text{ nm}$ și puterea $P = 1,5 \text{ W}$. Să se calculeze:

a) energia cinetică maximă a fotoelectronilor emiși și să se compare viteza lor cu viteza c a lumini în vid; b) lungimea de undă asociată acestor electronii în funcție de energia lor cinetică; c) randamentul cuantic al fotocatodului știind că fotocurentul are valoarea $I = 15 \text{ mA}$.

R: a) $E_c = 9,1 \cdot 10^{-20} \text{ J}$; b) $\frac{v}{c} = 1,4 \cdot 10^{-3}$, $\lambda = 1,62 \cdot 10^{-9} \text{ m}$;

c) $\eta = 122,9 \cdot 10^{-4}$

7.26. În spațiul cosmic un electron se apropie de un proton. Considerând energia totală a electronului la distanța infinit de mare de proton egală cu zero, să se determine lungimea de undă a undei asociate electronului la distanța $r = 1 \text{ m}$ de proton.

R: $\lambda_0 = 3,24 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

7.2. Natura ondulatorie a particulelor

Principiul dualității unda-corpusul extins la particule a constituit punctul de plecare în dezvoltarea mecanicii cuantice.

Ipoteza lui de Broglie. Între mărimile care determină caracterul de undă (frecvența și lungimea de undă) și mărimile care determina caracterul corpuscular (energia și impulsul) există o strânsă legătură.

Louis de Broglie, extinzând ideea unității materiale a lumii, elaborează ipoteza că orice particula are și un caracter ondulatoriu. El generalizează rezultatul obținut la radiația electromagnetică și asociază oricărei microparticule în mișcare, cu viteza v și impulsul p , o undă numită undă asociată, cu lungimea de undă numită lungime de undă de Broglie, adică:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (7.8)$$

Ipoteza lui Broglie a fost confirmată experimental de experiențele lui Davisson și Germer (sunt posibile numai în vid). Studiind reflexia electronilor pe suprafața unui cristal rotitor, ei au arătat că electronii în mișcare prezintă proprietăți ondulatorii, având loc fenomene de interferență și de difracție, fenomene specifice caracterului ondulatoriu. Lungimea de undă a undei asociate electronilor, cu viteze nerelativiste, este:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU}} = \frac{12,25}{\sqrt{U}} [\text{\AA}]. \quad (7.9)$$

La difracția undelor electronice s-a folosit ca rețea de difracție un cristal, care are distanțele dintre atomi de același ordin de mărime cu lungimea de undă de Broglie. Davisson și Germer au produs cu ajutorul unui tun electronic pe un fascicul monocromatic de electroni care a ajuns pe suprafața unui bloc de nichel (fig.7.5) monocristalin. Intensitatea fasciculului de electroni reflectați de cristalin, măsurată cu ajutorul unui detector de electroni (cilindru Faraday de exemplu), prezintă maxime și minime a căror poziție unghiulară depinde de energia electronilor incidenți.

Unghiurile corespunzătoare maximelor satisfac relația lui Braag:

$$2d \sin\theta = k \cdot \lambda, \quad (7.10)$$

unde d reprezintă constanta rețelei cristaline.

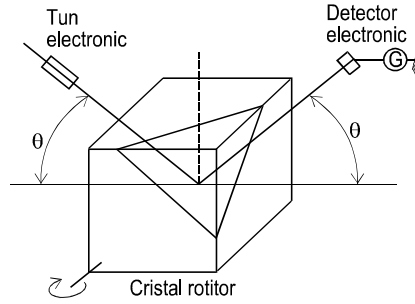


Figura 7.5

Valoarea lungimii de undă obținută experimental este în bună concordanță cu cea calculată cu ajutorul relației (7.9), confirmând ipoteza lui de Broglie că particulele au proprietăți ondulatorii.

Comportarea ondulatorie a unei particule poate fi descrisă de o funcție de undă:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp \left[-\frac{2\pi i W}{h} \cdot t \right], \quad (7.11)$$

unde $\psi(\vec{r})$ reprezintă partea spațială a funcției, iar W este energia particulei.

Funcția (7.61) nu are caracter general. Funcția $\psi(\vec{r}, t)$ este o mărime complexă, iar produsul ei cu conjugata $\psi^*(\vec{r}, t)$ dă o funcție reală, adică:

$$\psi \cdot \psi^* = |\psi|^2.$$

Max Born arată că mărimea $|\psi|^2$ determină probabilitatea ca particula descrisă prin funcția $\psi(\vec{r}, t)$ să se găsească la momentul t , în regiunea din spațiu, delimitată prin valorile coordonatelor cuprinse între \vec{r} și $\vec{r} + d\vec{r}$. Probabilitatea este dată de expresia:

$$dP(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \cdot dV,$$

unde:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

Densitatea de probabilitate are rolul unei funcții de distribuție și se exprimă prin raportul

$$P = \frac{dP}{dV} = |\psi|^2.$$

Probabilitatea $P(V, t)$ ca particula să se găsească în volumul finit V , la momentul t , este:

$$P(V, t) = \int_V dP = \int_V |\psi|^2 \cdot dV.$$

Probabilitatea ca particula considerata să se găsească undeva în întreg spațiul infinit este o certitudine, fiind egala cu unu.

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1, \text{ reprezintă condiția de normare.}$$

În aceasta interpretare, noțiunea de orbita electronica din teoria lui Bohr este înlocuită cu probabilitatea de localizare a electronului în jurul nucleului. Electronul este o particulă cuantică, caracterizată printr-o densitate de probabilitate de localizare în jurul nucleului care este maxima în punctele pe unde trec orbitele lui Bohr și are o valoare mai mica în restul spațiului.

Relațiile de nedeterminare ale lui Heisenberg

Heisenberg arată că determinarea simultană, cu precizie mare, a coordonatelor și impulsurilor particulelor nu se poate face, deoarece acestea au atât proprietăți corpusculare cât și ondulatorii. Relația de nedeterminare data de Heisenberg este:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}. \quad (7.12)$$

Relația (7.12) arată că produsul dintre nedeterminarea impulsului Δp și nedeterminarea coordonatei Δx nu poate fi mai mic decât constanta $h / 4\pi$. Relația (7.12) nu are semnificație pentru particule cu masa relativ mare.

Deoarece produsul dintre energie și timp are dimensiunea unei acțiuni, relația de nedeterminare pentru energie este:

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}. \quad (7.13)$$

În relația (7.13), ΔW este nedeterminarea energiei unei stări a microparticulei, într-un proces de măsurare a energiei, iar Δt durata acelui proces. Cu cât durata procesului de măsurare este mai mare, cu atât energia corespunzătoare este mai precis determinată.

Evidențierea impreciziei se poate face printr-o experiență de difracție a electronilor monoenergetici printr-o fantă. Fasciculul este considerat ca o undă plană monocromatică, de lungime de undă λ , care trece printr-o fantă de lărgime (a) (fig.7.6).

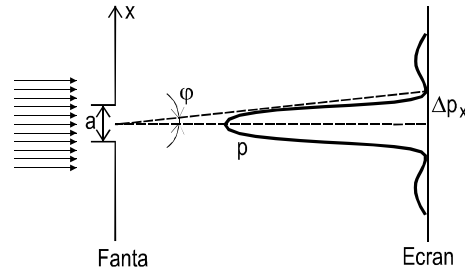


Figura 7.6

Unghiul φ corespunzător primului minim de difracție este dat de relația:

$$a \sin \varphi = \lambda. \quad (7.14)$$

Din punct de vedere corpuscular, tabloul de difracție dă distribuția statistică pe ecran a electronilor difuzați pe diferite direcții, la trecerea prin fantă. Aspectul corpuscular este dezvăluit de impactul electronilor pe ecran, iar aspectul ondulatoriu este evidențiat de distribuția totală pe ecran, deci de tabloul de difracție. În acest fel se pune în evidența dualitatea undă-particulă.

Imprecizia în determinarea coordonatei x , a unui electron care sosește pe ecran, este de ordinul mărimii fantei, deoarece nu se cunoaște exact locul pe unde a trecut fantă:

$$\Delta x \sim a. \quad (7.15)$$

Electronii difuzați au o componentă verticală a impulsului care le-a schimbat direcția:

$$\Delta p_x = p \cdot \operatorname{tg} \varphi \cong p \sin \varphi. \quad (7.16)$$

Din înmulțirea relațiilor (7.15) și (7.16) rezultă:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \cong a \cdot p \cdot \sin \varphi. \quad (7.17)$$

Din relațiile (7.8) și (7.14) se obține:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \cong \hbar, \quad (7.18)$$

unde: $\hbar > \frac{h}{4\pi}$.

Desfășurarea spatio-temporală a proceselor microcosmice diferă calitativ de cea prevăzută de mecanica clasică. Certitudinea este înlocuită cu probabilitatea, iar determinismul clasic cu determinismul statistic.

Aplicații

7.27. Să se calculeze valoarea deplasării Compton $\Delta\lambda$ și a unghiului θ sub care este difuzat un foton, dacă se știe că lungimea de undă a fotonului incident este $\lambda = 0,03 \text{ \AA}$, iar viteza electronului de recul este $V = 0,6c$.

Rezolvare:

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

$$\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{m_0 v^2}{2} \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{\frac{2hc}{\lambda m_0 \beta^2 c^2} - 1};$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = 0,425; \quad \beta = \frac{v}{c} = 0,6$$

$$\Delta\lambda = 0,0086 \text{ \AA}; \quad \theta \approx 50^\circ.$$

7.28. În spațiul cosmic un electron se apropie de un proton. Considerând energia totală a electronului la distanța infinit de mare de proton egală cu zero, să se determine lungimea de undă a unde asociate electronului la distanța $r = 2\text{m}$ de proton.

$$\mathbf{R: \lambda_e = 3,24 \cdot 10^{-5} m}$$

7.29. Un fascicul de electroni cade pe suprafața unui monocristal sub un unghi de 60° . Observarea electronilor reflectați se face sub un unghi egal cu unghiul de incidență. Să se calculeze primele trei valori ale diferenței de potențial acceleratoare pentru care se observă o reflexie maximă a electronilor. Constanta rețelei cristaline este $d = 2 \text{ \AA}$.

$$\mathbf{R: U_1 = 26,1V; U_2 = 104,5V; U_3 = 235V.}$$

7.30. Pe suprafața unui cristal cade un fascicul monocromatic de electroni, sub unghiul $\theta = 30^\circ$. Știind că după reflexie dau imagini de interferență de ordinul 2, să se calculeze viteza și potențialul de accelerație al electronilor. Distanța dintre planele cristaline este de $2,5 \text{ \AA}$.

R: $v = 2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $U = 11,25 \text{ V}$.

7.31. Într-o configurație a substanței durata de viață a stării fundamentale este infinită, pe când durata de viață a unei stări excitate este foarte mică. Există nuclee a căror stări excitate au $\Delta t = 10^{-30} \text{ s}$ la o energie de ordinul $\approx 10^{-14} \text{ J}$. Să se calculeze:

a) imprecizia corespunzătoare energiei în stare fundamentală;

b) imprecizia ΔW^* și $\Delta W^* / W^*$ în stare excitată considerată.

R: a) $\Delta W = 0$; b) $\Delta W^* = 1,05 \cdot 10^{-14} \text{ J}$; $\Delta W^* / W^* = 10\%$.

7.32. Un atom emite o radiație cu lungimea de undă $\lambda = 6000 \text{ \AA}$, timpul în care are loc emisia fiind de ordinul a 10^{-9} s .

a) să se calculeze imprecizia în determinarea lungimii

de undă $\lambda = 6000 \text{ \AA}$.

b) cu ce precizie poate fi localizat fotonul pe direcția sa de mișcare?

R: a) $\Delta \lambda = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ m}$; b) $\Delta x = 3 \text{ m}$.

7.33. Să se determine valoarea cu care se modifică lungimea de undă ca urmare a efectului Compton, dacă lungimea de undă corespunzătoare fotonului incident $\lambda = 0,03 \text{ \AA}$, iar viteza electronului de recul reprezintă $0,6 c$.

R: $\Delta \lambda = 0,013 \text{ \AA}$.

7.34. La studiul spectrului hidrogenului obținut cu ajutorul unei rețele de difracție având perioada $d = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ se observă că una din liniile spectrale ale seriei Balmer, de ordinul doi, corespunde unghiului $\theta = 30^\circ$. Să se determine cărei tranziții îi corespunde această linie. $R_H = 1096,77 \text{ m}^{-1}$.

R: $n = 4$.

8. MECANICA CUANTICĂ

Mecanica cuantică a rezultat din cercetările mecanicii ondulatorii a lui Broglie-Schrödinger în paralel cu mecanica matricială a lui Heisenberg și se ocupa cu mișcarea microparticulelor și a proceselor ce au loc între acestea. În mecanica ondulatorie (unde Schrödinger a continuat lucrările lui de Broglie) descrierea proprietăților microparticulei, respectiv ale sistemelor microscopice se fac cu ajutorul unei asociații, reprezentată printr-o funcție de undă, care satisface ecuația diferențială a lui Schrödinger.

8.1. Postulate ale mecanicii cuantice

Se consideră o particulă liberă, care se mișcă după o anumită direcție, având impulsul \vec{p} și energia W . Impulsul și energia sunt mărimi fizice compatibile, pentru că sunt simultan măsurabile.

Unda asociată particulei libere este unda plană de Broglie:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \exp^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = A \exp^{-\frac{i}{\hbar}(Wt - \vec{p} \cdot \vec{r})}, \quad (8.1)$$

unde:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

h fiind constanta lui Planck.

Conform ipotezei lui de Broglie, pentru unda asociată particulei libere sunt valabile aceleași relații ca și pentru unda luminoasă asociată fotonului:

$$\begin{aligned} W &= h\nu = \hbar\omega, \\ \vec{p} &= \frac{h}{\lambda} \vec{\mu}_k = h \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{\mu}_k = \hbar \cdot \vec{k}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

unde \vec{k} este vectorul de undă, având sensul versorului $\vec{\mu}_k$ al normalei la planul de undă.

Funcția de undă (8.1) descrie o stare proprie a particulei libere, definită prin valoarea proprie W a energiei particulei și prin valoarea proprie \vec{p} a impulsului particulei. Valorile proprii W și \vec{p} se obțin din funcția de

undă (8.1.) prin derivarea ei în raport cu timpul, respectiv prin calcularea gradientului ei, adică:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[A \exp \frac{-i}{\hbar} (Wt - \vec{p} \cdot \vec{r}) \right] = W \left[A \exp \frac{-i}{\hbar} (Wt - \vec{p} \cdot \vec{r}) \right]; \quad (8.3)$$

$$-i\hbar \nabla \left[A \exp \frac{-i}{\hbar} (Wt - \vec{p} \cdot \vec{r}) \right] = \vec{p} \left[A \exp \frac{-i}{\hbar} (Wt - \vec{p} \cdot \vec{r}) \right]. \quad (8.3')$$

Prin operațiile $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ și $-i\hbar \nabla$, efectuate asupra funcției de undă a particulei, care este o funcție proprie a energiei W și a impulsului \vec{p} , se reproduce funcția de undă, având ca factor valorile proprii W ale energiei și \vec{p} a impulsului particulei.

Operatorii energiei și impulsului sunt:

$$\hat{W} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (8.4)$$

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{\mu}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{\mu}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{\mu}_z \right).$$

Introducând expresiile (8.4) în relația (8.3) rezultă egalitățile:

$$\begin{aligned} \hat{W} \Psi_{W, \vec{p}} &= W \Psi_{W, \vec{p}}; \\ \hat{\vec{p}} \Psi_{W, \vec{p}} &= \vec{p} \Psi_{W, \vec{p}}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Relațiile (8.5) permit calcularea energiei și a impulsului particulei, când $\Psi_{W, \vec{p}}$ este cunoscută, dar pot folosi și la determinarea funcției de undă.

Valorile proprii ale energiei și impulsului particulei sunt valorile proprii ale operatorilor \hat{W} și $\hat{\vec{p}}$, iar funcția de undă $\Psi_{W, \vec{p}}$ este funcția proprie comună a acestor operatori, corespunzătoare valorilor proprii W și \vec{p} .

În mecanica cuantică, mărimile fizice sunt reprezentate matematic prin operatori, iar valorile obținute la măsurarea mărimilor fizice sunt valorile proprii ale operatorilor respectivi.

8.2. Momentul cinetic în mecanica cuantică

Momentul cinetic este definit în mecanica cuantică ca și în fizica clasică, cu deosebirea că $\hat{\vec{r}}$ și $\hat{\vec{p}}$ sunt operatori.

$$\hat{\vec{l}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = -i\hbar(\vec{r} \times \nabla). \quad (8.6)$$

Componentele operatorului moment cinetic sunt:

$$\begin{aligned} \hat{l}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right); \\ \hat{l}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right); \\ \hat{l}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Operatorul pătrat al momentului cinetic este:

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2. \quad (8.8)$$

Operatorii definiți în expresiile (8.7) și (8.8) satisfac relațiile de comutare:

$$\begin{aligned} [\hat{l}_x, \hat{l}_y] &= i\hbar\hat{l}_z; \\ [\hat{l}_y, \hat{l}_z] &= i\hbar\hat{l}_x; \\ [\hat{l}_z, \hat{l}_x] &= i\hbar\hat{l}_y. \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$[\hat{l}_x, \hat{l}^2] = [\hat{l}_y, \hat{l}^2] = [\hat{l}_z, \hat{l}^2] = 0. \quad (8.10)$$

Din relațiile (8.9) rezultă că \hat{l}_x, \hat{l}_y și \hat{l}_z nu sunt comutativi deci nu posedă o funcție proprie comună.

Proiecțiile momentului cinetic: $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$, nu pot avea simultan valori determinate. Din relația (8.10) se observă că operatorul \hat{l}^2 are funcții proprii comune cu operatorul fiecăreia dintre proiecțiile sale. Rezulta că pătratul

momentului cinetic și numai una din proiecțiile sale pot avea simultan valori determinate.

Folosind coordonatele sferice se găsește că \hat{l}^2 și l_z sunt cuantificați putând lua valorile:

$$\begin{aligned} \bar{l}^2 &= l(l+1)\hbar^2; & l &\in [0, 1, 2, \dots, n] \\ l_z &= m\hbar; & m &\in [0, \pm 1, \dots, \pm l] \end{aligned} \quad (8.11)$$

Numărul cuantic l , numit numărul cuantic orbital, este numărul care exprimă cuantificarea modului momentului cinetic, pe când numărul cuantic m exprimă cuantificarea componentei pe OZ a momentului cinetic, respectiv a componentei pe OZ a momentului magnetic orbital și se numește număr cuantic magnetic.

8.3. Ecuația lui Schrödinger pentru mișcarea nerelativistă

Mișcarea unei particule de masă m și energie W , care nu este supusă unui câmp de forțe căreia în procesul mișcării îi este asociată o undă de Broglie, este descrisă prin funcția de undă ce se propaga cu viteza de fază v și care este produsul a doi factori:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t}. \quad (8.12)$$

Funcția de undă (8.12) trebuie să satisfacă ecuația undelor:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (8.13)$$

Din relația (8.14) rezultă că:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi(x, y, z, t) = -\frac{4\pi^2}{T^2} \Psi(x, y, z, t). \quad (8.14)$$

În acest caz:

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \frac{1}{v^2} = \frac{4\pi^2}{T^2 v^2} \Psi(x, y, z, t) = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Psi(x, y, z, t). \quad (8.15)$$

Înlocuind în expresia (8.15) factorul λ prin relația lui de Broglie (v_1 , este viteza particulei), $\lambda = h / m v_1$, se obține:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2}{\frac{h^2}{m^2 v_1^2}} \Psi(x, y, z, t) = \frac{2m}{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} \frac{mv_1^2}{2} \Psi(x, y, z, t). \quad (8.16)$$

Dacă se consideră mișcarea particulei într-un câmp de forțe exterioare rezultă relația:

$$\frac{mv_1^2}{2} = W - U$$

și

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \Psi(x, y, z, t). \quad (8.17)$$

Introducând în (8.13) relația (8.17) se obține:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z, t)}{\partial z^2} + \\ & + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \Psi(x, y, z, t) = 0, \end{aligned} \quad (8.18)$$

sau:

$$\Delta \Psi(x, y, z, t) + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \Psi(x, y, z, t) = 0. \quad (8.6)$$

Expresia (8.18.) reprezintă ecuația nerelativistă a lui Schrödinger, deoarece $v_1 \ll c$.

Înlocuind relația (8.10) în (8.16) se obține:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial z^2} \right] \exp^{-i\omega t} + \\ & + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \exp^{-i\omega t} \Psi(x, y, z, t) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial z^2} = \\ & = -\frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \Psi(x, y, z), \end{aligned}$$

$$\text{sau:} \quad \Delta \Psi(x, y, z) = -\frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \Psi(x, y, z). \quad (8.19)$$

Ecuația atemporală a lui Schrödinger depinde de coordonatele spațiale:

Se poate utiliza și funcția de undă:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \cdot e^{-2\pi i \frac{W}{h} \cdot t} \quad (8.20)$$

deoarece: $\omega = 2\pi\nu$, iar $\nu = \frac{W}{h}$.

Prin derivarea relației (8.20) în raport cu timpul, rezultă:

$$\frac{\partial \Psi(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h} W \Psi(x, y, z, t), \quad (8.21)$$

de unde se obține expresia energiei W , care introdusă în (8.18), se obține relația:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi(x, y, z, t) + \frac{2im}{h} \frac{\partial \Psi(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{2m}{h^2} U \Psi(x, y, z, t) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Ecuția temporală a lui Schrödinger (8.22) este utilă în descrierea proceselor în care energia potențială U este funcție de coordonate și de timp.

Ecuțiile (8.19) și (8.22) reprezintă postulatele în mecanica cuantica la fel ca postulatele lui Newton în mecanica clasică.

Aplicații

8.1. Fie un operator \hat{F} nehermitic. În ce caz operatorul \hat{F}^2 este hermitic?

Rezolvare:

Se consideră operatorul \hat{F} sub forma: $\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$, unde \hat{A} și \hat{B} sunt hermitici.

$$\hat{F}^2 = \hat{A}^2 - \hat{B}^2 + i \cdot (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})$$

Dacă $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = 0$, atunci operatorii \hat{A} și \hat{B} , așa-zisele părți hermitică și antihermitică ale operatorului \hat{F} anticomută, iar \hat{F}^2 este hermitic

8.2. Se consideră trei operatori \hat{A} , \hat{B} și \hat{C} . Să se exprime comutatorul produsului $\hat{A}\hat{B}$ cu \hat{C} cu ajutorul comutatorilor $[\hat{A}, \hat{C}]$.

Rezolvare:

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$$

Analog, $[\hat{A}, \hat{B} \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C} + \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}]$

8.3. Fie un operator \hat{F} oarecare. Să se arate că acest operator se poate scrie sub forma: $\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$, unde \hat{A} și \hat{B} sunt operatori hermitici

Rezolvare:

$$\hat{A} = \frac{\hat{F} + \hat{F}^\dagger}{2}; \quad \hat{B} = \frac{\hat{F} - \hat{F}^\dagger}{2i}$$

8.4. Să se demonstreze legea de distribuție a comutatorilor

$$\left[\sum_i \hat{A}_i, \sum_k \hat{B}_k \right] = \sum_{i,k} [\hat{A}_i, \hat{B}_k]$$

Rezolvare:

$$\left[\sum_i \hat{A}_i, \sum_k \hat{B}_k \right] = \sum_i \hat{A}_i \sum_k \hat{B}_k - \sum_k \hat{B}_k \sum_i \hat{A}_i = \sum_{i,k} [\hat{A}_i, \hat{B}_k]$$

8.5. a) Să se scrie ecuația lui Schrodinger pentru o particulă cuantică ce se mișcă sub acțiunea unei forțe elastice de constantă elastică k .

b) Să se scrie ecuația lui Schrodinger pentru o particulă cuantică încărcată electric cu sarcina q_1 ce se mișcă într-un camp coulombian creat de sarcina q_2 .

Rezolvare:

Ecuația lui Schrodinger atemporală și unidimensională este:

$$\psi''(x) + \frac{2m_0}{\hbar^2} (\mathcal{E} - U(x)) \psi(x) = 0$$

a) Potențialul din care derivă forța elastică este:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2.$$

Ecuația Schrodinger capătă forma:

$$\psi''(x) + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left(\mathcal{E} - \frac{1}{2} kx^2 \right) \psi(x) = 0.$$

b) Potențialul pentru problema propusă este:

$$U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Ecuația Schrodinger capătă forma:

$$\psi''(r) + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left(\mathcal{E} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right) \psi(r) = 0.$$

8.6. Care dintre soluțiile ecuației Schrodinger se numesc staționare? Să se arate că ele se obțin doar în cazul în care energia potențială U nu depinde de timp.

Rezolvare:

Dacă energia potențială U nu depinde explicit de timp, ecuația temporală a lui Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{2m_0}{\hbar^2} \Delta \Phi(\vec{r}, t) - U\Phi(\vec{r}, t),$$

poate fi rezolvată prin metoda separării variabilelor. Se caută soluții de forma:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})f(t).$$

Fiind soluții ale ecuației Schrodinger pe care o verifică, se introduce în ecuație și după câteva calcule se obține:

$$\Phi_n(\vec{r}, t) = \psi_n(\vec{r})e^{-i\frac{\epsilon_n t}{\hbar}}$$

unde $\psi_n(\vec{r})$ sunt funcțiile proprii, iar ϵ_n sunt valorile proprii ale operatorului energie.

Din forma funcției de stare se observă că dependența de timp a acesteia este de tip armonic. Densitatea probabilității de localizare a particulei cuantice în spațiul fazelor este dată de pătratul modulului funcției de stare:

$$|\Phi(\vec{r}, t)|^2 = \Phi(\vec{r}, t)\Phi^*(\vec{r}, t)$$

unde $\Phi^*(\vec{r}, t)$ reprezintă funcția complex conjugată a funcției de stare. Se observă că această densitate nu depinde de timp. Soluțiile de tipul celor găsite mai sus descriu stări staționare.

8.7. Să se determine cum se va modifica funcția de stare ce descrie stările staționare, dacă energia potențială crește cu o cantitate constantă oarecare ΔU .

Rezolvare:

Variația energiei potențiale cu o cantitate constantă oarecare ΔU va provoca schimbarea originii energiilor. Valorile proprii ale ecuației Schrodinger:

$$\Delta \psi(\vec{r}) + \frac{2m_0}{\hbar^2} [\epsilon - U(\vec{r})] \psi(\vec{r}) = 0$$

se vor modifica cu aceeași cantitate ΔU . În consecință diferența $\epsilon - U(\vec{r})$ nu se va modifica și forma funcției proprii $\psi(\vec{r})$ rămâne neschimbată. Se va modifica doar factorul temporal din funcția de stare:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-i\frac{(\epsilon_n + \Delta U)t}{\hbar}}$$

Sens fizic are pătratul modulului funcției de stare și în consecință variația energiei potențiale cu o cantitate constantă oarecare ΔU nu va

provoca nici o schimbare în ceea ce privește localizarea particulei cuantice în spațiul fazelor.

8.8. Fie un operator \hat{F} nehermitic. În ce caz operatorul \hat{F}^2 este hermitic?

8.9. Să se demonstreze legea de distribuție a comutatorilor (comutatorul sumei este egal cu suma comutatorilor).

$$\left[\sum_i \hat{A}_i, \sum_k \hat{B}_k \right] = \sum_{i,k} [\hat{A}_i, \hat{B}_k]$$

8.10. Se consideră trei operatori \hat{A}, \hat{B} și \hat{C} . Să se exprime comutatorul produsului $\hat{A}\hat{B}$ cu \hat{C} cu ajutorul comutatorilor $[\hat{A}, \hat{C}]$ și $[\hat{B}, \hat{C}]$.

9. FIZICA ATOMULUI ȘI MOLECULEI

9.1. Serii spectrale

Spectograful cu prismă dispersează un fascicul de lumina într-un spectru. Dacă sursa de lumina este un solid sau un lichid incandescent, spectrul este continuu, iar dacă sursa este un gaz prin care trece un curent electric de descărcare, spectrul este un spectru de linii. Lungimile de undă ale liniilor sunt caracteristice elementului care emite lumina. Structura de linii a spectrului se continua atât în regiunea ultravioleta, cât și în cea infraroșie, unde pentru defectare sunt necesare metode fotografice.

Johann Jakob Balmer a găsit formula care da frecvențele unui grup de linii emise de hidrogenul atomic. În anumite condiții de excitare, hidrogenul atomic poate să emită un șir de linii care se numește serie spectrală. Balmer a stabilit că lungimile de undă ale acestor linii sunt date de :

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (9.1)$$

unde λ este lungimea de undă, R constanta lui Rydberg iar n are valorile întregi 3, 4, 5 etc.

Lyman, Paschen, Brackett, Pfund au descoperit și alte serii spectrale ale hidrogenului după cum urmează:

$$\text{Seria Lyman:} \quad \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (9.2)$$

$$\text{Seria Paschen:} \quad \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, \dots \quad n = 5, 6, \dots, \quad (9.3)$$

$$\text{Seria Brackett:} \quad \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 5, 6, \dots, \quad (9.4)$$

$$\text{Seria Pfund:} \quad \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 6, 7, \dots \quad (9.5)$$

Formula (9.1) scrisă în funcție de frecvența luminii este:

$$\nu = R c \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{R c}{2^2} - \frac{R c}{n^2} \quad (9.6)$$

Fiecare din fracțiile aflate în membrul drept al relației (9.6) se numește termen spectral. În câteva cazuri simple ca hidrogenul, heliu simplu ionizat, litiul dublu ionizat, valorile numerice ale termenilor spectrali pot fi calculate din considerații teoretice, dar pentru atomii complecși ele trebuie determinate experimental din analiza spectrelor.

Cheia întregii spectrelor atomice o constituie conceptul de nivel atomic de energie. Astfel problema fundamentală a spectroscopului este să determine nivele de energie ale unui atom din valorile măsurate ale lungimilor de undă ale liniilor spectrale emise, atunci când atomul trece de la un set de nivele de energie, la altul. Nivelele de energie rezultate din analiza spectrelor atomice au fost tabelate sau reprezentate cu ajutorul unor diagrame. Nivelul de energie minimă se numește stare fundamentală, iar toate nivelele superioare se numesc stări excitate. O linie este emisă atunci când atomul trece din stare excitată într-una mai joasă, iar la trecerea atomului din stare normală într-o stare excitată, linia spectrală este absorbită.

9.2. Atomul lui Bohr

Pentru a înțelege structura atomilor și legătură dintre structura atomică și spectrele atomice este necesară o abatere radicală de la principiile

stabilite ale mecanicii clasice și ale electromagnetismului. În teoria lui Bohr, aceasta s-a realizat cu ajutorul a doua postulate:

1. Electronii se pot mișca în atomi numai pe anumite orbite pe care au energii determinate, numite orbite staționare. Aflați pe aceste orbite, ei nici nu radiază, nici nu absorb unde electromagnetice.

2. Atomul emite sau absoarbe radiații, sub forma de fotoni, numai la trecerea electronilor de pe o orbita pe alta. frecvența radiației emise sau absorbite se obține din egalitatea energiei fotonului emis cu valoarea absolută a diferenței energiilor electronului de pe orbita inițială și cea finală:

$$h\nu = |W_i - W_f|. \quad (9.7)$$

Teoria lui Bohr nu este consecvent cuantica pentru că mișcarea electronului pe orbita este studiată folosind dinamica clasică. Bohr a găsit orbitele staționare, impunând orbitele aflate pe baza mecanicii clasice anumite condiții de cuantificare. Pentru a se arata în ce constau aceste condiții de cuantificare, se analizează un sistem fizic format dintr-un nucleu cu sarcina $+Ze$ în jurul căruia se învârtă un electron. Un astfel de sistem se numește atom hidrogenoid.

În teoria lui Bohr, se iau în considerație numai orbitele circulare. Condiția de cuantificare pentru orbitele circulare, formulată de Bohr, arată că momentul cinetic orbital al electronului este un multiplu întreg de $h/2\pi$ adică:

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.8)$$

unde m_e și r_n reprezintă masa electronului respectiv raza orbitei staționare, iar n este numărul cuantic.

Mișcarea electronului pe un cerc, în jurul nucleului, se datorește forței de atracție a electronului de către nucleu, forța care reprezintă forța centripetă adică:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}. \quad (9.9)$$

Din relația (9.9) rezulta că energia cinetică poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

În câmpul electrostatic creat de nucleu, electronul are energia potențială:

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (9.10)$$

Energia totală a electronului este:

$$W = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (9.11)$$

Din relațiile (9.8) și (9.9) se obține:

$$r_n = \frac{1}{Z} n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} = \frac{1}{Z} a_0 n^2; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.12)$$

unde: $a_0 = r_{1H} = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_0 e^2} = 0,53 \cdot 10^{-10} m$, reprezintă raza primei orbite Bohr pentru atomul de hidrogen.

Fiecărei valori permise a razei (9.12) îi corespunde o valoare permisă a vitezei, care rezulta din expresiile (9.9) și (9.12) adică:

$$v_n = Z \frac{1}{n} \frac{e^2}{2h\epsilon_0}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Înlocuind relația (9.12) în (9.11) se obține formula pe a n-a orbită staționară:

$$W_n = -Z^2 \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.13)$$

Pe baza celui de-al doilea postulat al lui Bohr, din relația (9.13) pentru frecvența $\nu_{n'n}$ rezultă expresia:

$$\nu_{n'n} = \frac{W'_n - W_n}{h} = Z^2 \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right). \quad (9.14)$$

Pentru $Z = 1$, se obține formula lui Balmer, cunoscându-se că:

$$\tilde{\nu}_{n'n} = \frac{n'n}{c}.$$

Teoria lui Bohr a permis legarea valorii constantei lui Rydberg de constanta lui Planck, adică:

$$R_H = \frac{m_0 e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 c}. \quad (9.15)$$

Relația (9.15) conduce la valori destul de apropiate de cele determinate experimental.

9.3. Experiența Franck–Hertz. Insuficiențele teoriei lui Bohr

James Franck și Gustav Hertz au confirmat experimental că stările energetice ale atomilor sunt discrete (fig.9.1). La emiterea unui fascicul de electroni prin vapori de mercur, în cazul în care energia electronilor este mai mică de 4,9V, ciocnirile electronilor cu atomii de mercur nu influențează intensitatea curentului anodic I_A . Când energia electronilor devine egală cu 4,9eV apare o scădere bruscă a curentului. Valoarea curentului anodic scade brusc pentru orice creștere a potențialului accelerator cu 4,9V, ceea ce dovedește că atomii de mercur, în urma ciocnirii lor cu electronii accelerați din tub, nu pot primi decât valori egale cu un multiplu întreg de 4,9eV (fig.9.2).

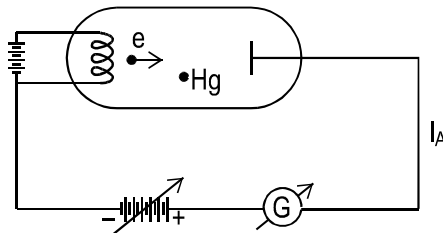


Figura 9.1

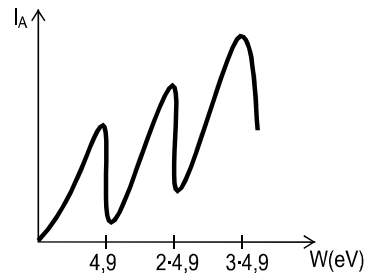


Figura 9.2

Dacă se consideră că energia atomului de mercur în stare fundamentală este W_0 , iar valoarea energiei acestuia în stare excitată este:

$$W_1 = W_0 + 4,9eV,$$

Atunci pentru $W < 4,9eV$ energia electronilor nu este suficientă pentru a aduce atomii în stare excitată, ciocnirile fiind elastice. Dacă $W > 4,9eV$, electronii din fascicul pot da energia de 4,9eV atomilor de mercur și astfel curentul suferă o scădere bruscă ș.a.m.d.

Atomii de mercur emit prin dezexcitare o radiație monocromatică cu lungimea de undă calculată din condiția de cuantificare a lui Bohr:

$$\lambda = \frac{c}{\nu_{n'n}} = \frac{c \cdot h}{W_{n'} - W_n} = 2537 \text{ Å},$$

revenind apoi în starea fundamentală.

Succesele teoriei lui Bohr constau în faptul că se pot explica seriile spectrale de atomul de hidrogen și de ionii hidrogenoizi. De asemenea, permite calcularea constantei lui Rydberg și dă o valoare satisfăcătoare pentru energia de ionizare.

Postulatele lui Bohr permit însă determinarea nivelelor energetice ale atomilor mai complicați, începând chiar cu atomul de heliu. În cazul metalelor alcaline, cu un singur electron de valență, teoria lui Bohr nu poate explica spectrul de dubleti și nu permite evaluarea liniilor spectrale. Insuccesul se datorește faptul că ea nu este nici consecvent clasică și nici consecvent cuantică, deoarece se consideră mișcarea electronului pe o orbită perfect determinată, dar se cuantifică energia, impulsul și raza orbitei.

Modelul lui Bohr a fost ulterior îmbunătățit de Sommerfeld care a considerat că electronul se mișcă în jurul nucleului pe orbite eliptice. Aceste teorii au făcut un pas în cunoașterea structurii atomului arătând necesitatea unor legi cuantice în studiul sistemelor microscopice.

Aplicații

9.1. Cunoscând constanta de ecranare $\sigma = 1,65$ pentru aluminiu, să se afle pentru care tranziție se obține linia K, cu lungimea de undă $\lambda = 7,97 \cdot 10^{-10}$ m. Se dau: $Z_{Al} = 13$; $R = 1,09737 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

Rezolvare:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{\lambda R (Z - \sigma)^2} = 0,111$$

$$n^2 = 9; n = 3$$

Tranziția este: $n = 3 \rightarrow n = 1$.

9.2. Admițând că în interiorul unui atom hidrogenoid mișcarea nerelativistă a electronilor are loc pe orbite circulare ce satisfac

condiția de cuantificare $l_n = n\lambda$, să se stabilească valorile posibile ale momentului cinetic, vitezei și energiei totale a electronilor, precum și ale razelor orbitelor (modelul Bohr).

Rezolvare:

$$F_e = F_{cf} \Rightarrow \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m_0 v_n^2}{r_n}$$

$$2\pi \cdot r_n = n\lambda_n = n \frac{h}{m_0 v_n}$$

Se rezolvă sistemul și se obține:

$$v_n = \frac{1}{n} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_0 Ze^2} \cdot n^2$$

$$L_n = |\vec{r}_n \times m_0 \vec{v}_n| = n\hbar$$

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{cin} + \mathcal{E}_{pot} = -\frac{1}{2} \frac{m_0 Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} \frac{1}{n^2}.$$

9.3. Viteza electronilor care cad pe anticatodul unui tub de raze X reprezintă jumătate din viteza luminii. Să se determine lungimea de undă dinspre lungimile de undă mici ale spectrului continuu de raze X. Se dau $v = c/2$; $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js; $c = 3 \cdot 10^8$ ms⁻¹

$$\mathbf{R:} \lambda_{min} = 15 \cdot 10^{-12} m$$

9.4. La studiul spectrului hidrogenului obținut cu ajutorul unei rețele de difracție având perioada $d=2 \cdot 10^{-6}$ m se observă că una din liniile spectrale ale seriei Balmer, de ordinul doi corespunde unghiului $\theta=30^\circ$. Să se determine cărei tranziții îi corespunde această linie.

$$\text{Se dă } R_H = 1096,77 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}.$$

$$\mathbf{R:} n=4$$

9.5. Să se afle pentru care tranziție se obține linia k, cu lungimea de undă $\lambda=7,97\text{Å}$, știind că pentru aluminiu, constanta de ecranare $\sigma = 1,65$. Se dau $Z_{Al}=13$, $R=1,09737 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

$$\mathbf{R}: n=3 \rightarrow n=1.$$

9.6. Să se calculeze lucrul de ieșire a unui electron de pe pătura K a atomului de aluminiu. Se dau: $Z = 13$; $R = 1,09737 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$; $\sigma = 1.65$.

$$\mathbf{R}: L_{\text{ieș}} = 2,805 \cdot 10^{-22} \text{ J}.$$

9.4. Atomul hidrogenoid

Un sistem fizic format dintr-un nucleu atomic și un electron se numește atom hidrogenoid. Electronul aflat în câmpul electrostatic coulombian al nucleului, a cărui sarcina este $+Ze$, are energia potențială;

$$U(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (9.16)$$

care depinde doar de distanța r , dintre nucleu și electron, ϵ_0 fiind permitivitatea vidului.

Masa nucleului fiind mult mai mare decât masa electronului, se poate considera că nucleul rămâne practic fix, în originea sistemului de coordonare. Pentru a deduce stările cuantice ale atomului hidrogenoid trebuie rezolvată ecuația lui Schrödinger care pentru potențialul dat de relația (9.16) are forma:

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(W + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0, \quad (9.17)$$

unde m_e reprezintă masa electronului.

În fizica matematică se demonstrează că ecuația (9.17) admite soluții nebanale, univoce, continue și mărginite, numai dacă energia W are una din valorile:

$$W_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.18)$$

Funcțiile de undă ψ ale stărilor staționare au în coordonate sferice r, θ, φ expresia:

$$\psi_{nl}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (9.19)$$

unde $R_{nl}(r)$ reprezintă partea radială a soluției și $y_{lm}(\theta, \varphi)$ sunt funcții sferice.

Numărul $n = 1, 2, 3, \dots$ care cuantifică energia se numește număr cuantic principal. Numărul l reprezintă numărul cuantic orbital și poate lua valorile $l = 0, 1, \dots, n-1$, iar numărul m reprezintă numărul cuantic magnetic și poate lua valorile $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$.

9.5. Atomii alcalini

În atomii alcalini, electronul de valență se mișcă atât în câmpul electric al nucleului cât și în câmpurile electrice produse de ceilalți electroni. Se constată experimental că energia de extragere pentru electronul de valență este de 4-5 ori mai mică decât energia de extragere pentru un al doilea electron din atom. Deci, nucleul având sarcina electrică $+Ze$, împreună cu cei $(Z-1)$ electroni formează o structură relativ stabilă, având sarcina:

$$+Ze + (Z-1)(-e) = +e.$$

Câmpul electric creat de “restul atomic” nu mai are o simetrie strict sferică, mai ales datorită faptului că electronul de valență în mișcare se deformează repartitia spațială a sarcinii din interior, care va căpăta un moment electric dipolar nenul. În această situație, electronul de valență se mișcă într-un câmp electric compus din câmpul de simetrie sferică și câmpul electric dipolar, iar energia sa potențială este:

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2 \cdot a}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \dots \quad (9.20)$$

Primul termen din expresia (9.20) este egal cu energia potențială a electronului în atomul de hidrogen iar al doilea termen reprezintă scăderea energiei

potențiale a electronului, datorită câmpului electric dipolar indus, care produce o atracție suplimentară.

Dacă se rezolvă ecuația lui Schrödinger pentru atomii alcalini, se găsește că nivelele energetice vor fi apropiate de cele corespunzătoare ale atomului de hidrogen, fiind deplasate în jos cu o cantitate de număr cuantic l . Pentru atomul alcalin se găsește că energia electronului de valență este:

$$W_{n,l} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{[n + \sigma(l)]^2} \quad (9.21)$$

unde $\sigma(l)$ este o corecție negativă, care scade în modul când crește l , adică:

$$\sigma(l) \sim -\frac{a}{(2l+1)}$$

În figura 9.3 sunt prezentate schemele nivelelor energetice ale atomului de hidrogen, respectiv ale atomului alcalin. Nivelul energetic caracterizat prin numerele cuantice n, l se reprezintă prin simbolul nl , unde n se înlocuiește cu o cifră, iar pentru $l = 0, 1, 2, 3 \dots$ se folosesc notațiile s, p, d, f

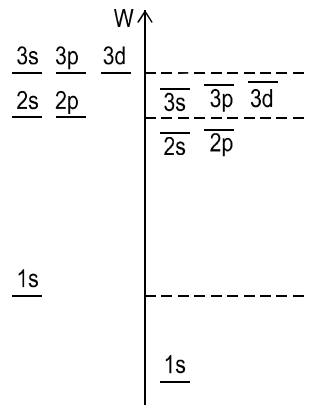


Figura 9.3

Tranzițiile permise corespund regulilor de selecție:

$$\Delta l = \pm 1; \Delta m = 0, \pm 1. \quad (9.15)$$

Pe baza schemei nivelelor energetice, cât și a regulilor de selecție se pot determina frecvențele liniilor spectrale ale radiațiilor emise de atomii alcalini.

9.6. Momentul magnetic orbital al electronului

Considerăm că un atom hidrogenoid se afla într-un câmp magnetic omogen și staționar, caracterizat prin vectorul B , îndreptat în lungul axei O_z ($B_x = B_y = 0, B_z = B$).

Expresia hamiltonianului este dată de relația:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{e}{2m_e} \hat{l} \cdot \vec{B} + \frac{e^2 B^2}{8m_e} (x^2 + y^2), \quad (9.22)$$

unde \hat{l} este operatorul momentului cinetic al electronului și \hat{H}_0 este hamiltonianul în lipsa câmpului magnetic ($\vec{B} = 0$). Termenii care conțin pe \vec{B} exprimă o energie de interacțiune între electron și câmpul magnetic. Dacă energia de interacțiune dintre un moment magnetic μ și un câmp magnetic este:

$$\Delta W = - \int_0^{\vec{B}} \vec{\mu} \cdot d\vec{B},$$

se obține:

$$\Delta \hat{H}_{magn} = - \int_0^{\vec{B}} \left[\left(-\frac{e}{2m_e} \right) \hat{l} - \frac{e^2}{4m_e} (x^2 + y^2) \vec{B} \right] d\vec{B} = - \int_0^{\vec{B}} \hat{\mu} \cdot d\vec{B}. \quad (9.23)$$

În relația (9.23) expresia

$$\hat{\mu} = \left(-\frac{e}{2m_e} \right) \hat{l} - \frac{e^2}{4m_e} (x^2 + y^2) \vec{B}, \quad (9.24)$$

reprezintă operatorul momentului magnetic al electronului. Acest operator conține operatorul momentului magnetic orbital:

$$\hat{\mu}_l = \left(-\frac{e}{2m_e} \right) \hat{l} = \gamma_l \hat{l}, \quad (9.24, a)$$

care se datorește mișcării orbitale și operatorul momentului diamagnetic:

$$\hat{\mu}_d = -\frac{e}{2m_e} (x^2 + y^2) \vec{B} \quad (9.24, b)$$

care este direct proporțional și de sens contrar vectorului \vec{B} .

Operatorul moment magnetic orbital $\vec{\mu}_l$ diferă de operatorul moment cinetic \vec{l} prin factorul constant:

$$\gamma_l = -\frac{e}{2m_e},$$

numit raport megnetomecanic orbital. În acest caz au valori determinate simultan într-o stare cuantica, numai $\vec{\mu}_l^2$ și μ_{l_z} . Valorile proprii ale

operatorului pătratului momentului magnetic orbital, cât și ale operatorului proiecției sale pe Oz sunt:

$$\mu_l^2 = \frac{e^2}{4m_e^2} \vec{l}^2 = \frac{e^2 \hbar^2}{4m_e^2} l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.25)$$

$$\mu_{lz} = -\frac{e}{2m_e} l_z = m \left(-\frac{e\hbar}{2m_e} \right), \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l. \quad (9.26)$$

Se observă că proiecția pe Oz a momentului magnetic orbital este un multiplu întreg al momentului magnetic elementar, numit magnetonul Bohr-Procopiu:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2. \quad (9.27)$$

Se observă că mărimea momentului magnetic orbital, cât și mărimea proiecției sale pe Oz sunt:

$$\mu_l = \sqrt{l(l+1)} \cdot \mu_B, \quad l = 0, 1, \dots,$$

$$\mu_{lz} = -m\mu_B, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l, \quad (9.28)$$

În fizica clasică s-a prevăzut existența momentului magnetic orbital și a momentului diamagnetic, deoarece un electron în mișcarea sa orbitală reprezintă un curent electric închis și în consecință are un moment magnetic. Dacă un electron parcurge uniform o orbită circulară de rază r , momentul magnetic orbital este dat de expresia:

$$\mu_l = SI = \pi r^2 \frac{e}{T} = \frac{er^2\omega}{2} = \frac{e}{2m_e} \cdot l,$$

unde T și ω sunt perioada respectiv viteza unghiulară a mișcării electronului, iar l reprezintă momentul cinetic al electronului, adică:

$$\vec{\mu}_l = -\frac{e}{2m_e} \cdot \vec{l}.$$

Larmor a arătat că orice orbită electronică, aflată într-un câmp magnetic constant, realizează o precesie în jurul direcției câmpului magnetic cu viteza unghiulară:

$$\vec{\omega}_L = \frac{e}{2m_e} \cdot \vec{B}, \quad (9.29)$$

numita viteza unghiulara Larmor. în general $\omega_L \ll \omega$.

Langevin a arătat că datorita precesiei Larmor apare un moment magnetic suplimentar al electronului, opus câmpului magnetic, numit moment diamagnetic:

$$\vec{\mu}_d = -\frac{er_p^2\omega_L}{2} = -\frac{er_p^2}{4m_e} \cdot \vec{B} = -\frac{e^2}{4m_e} (x^2 + y^2) \cdot \vec{B},$$

unde r_p este raza mișcării de precesie a electronului.

Deoarece precesia se face mult mai încet decât mișcarea orbitală, raza r_p este egală cu distanța electronului față de axa Oz , în lungul căreia este orientat câmpul magnetic, adică: $r_p^2 = x^2 + y^2$.

9.7. Momentul cinetic propriu al electronului

Electronul posedă o mișcare de rotație în jurul propriei sale axe, numită spin electronic. Momentul cinetic de spin are aceeași proprietate ca și momentul cinetic orbital, adică \vec{S}^2 și S_z pot fi măsurate simultan, cu precizie. Valorile proprii ale operatorilor \hat{S}^2 și \hat{S}_z sunt:

$$\vec{S}^2 = S(S+1)\hbar^2, \quad (9.30)$$

$$S_z = m_s \cdot \hbar, \quad m_s = -s, \dots, +s,$$

Unde S este numărul cuantic de spin, iar m_s este numărul cuantic magnetic de spin, putând lua $2S+1=2$ valori.

$$\text{Rezulta că : } S = \frac{1}{2}, \text{ și deci: } m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Caracteristicile momentului cinetic de spin sunt următoarele:

$$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)} \cdot \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \hbar; \quad (9.31, a)$$

$$S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar \quad (9.31, b)$$

Electronul are un moment magnetic propriu care este cuplat cu momentul cinetic propriu. Expresia acestuia este:

$$\vec{\mu}_s = \gamma_s \cdot \vec{S}, \quad (9.32)$$

unde constanta de cuplaj γ_s se numește raport magnetomecanic de spin al electronului.

9.8. Momentul vectorial al atomului

Dacă momentul cinetic \vec{l} are modulul egal cu $\sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$ iar proiecția lui Oz este $m \cdot \hbar$, unde $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l, l_x$ și l_y nefiind determinate, se considera un vector \vec{l} de lungime $\sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$, care efectuează o precesie în jurul axei Oz descriind un con, astfel încât înălțimea conului să fie egală cu $m \cdot \hbar$.

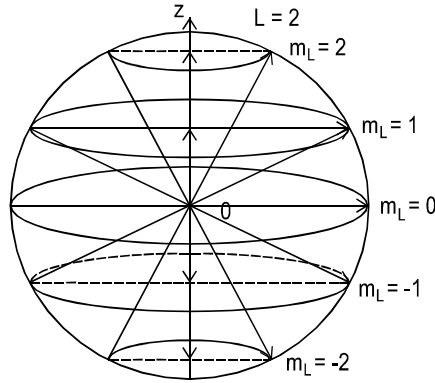


Figura 9.4

În figura 9.4 este reprezentat momentul cinetic \vec{l} pentru cazul $l = 2$ conținând cele $2l + 1 = 5$ posibilități pentru l_z . Dacă se analizează compunerea a două momente cinetice \vec{l}_1 și \vec{l}_2 , momentul cinetic rezultat este:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2.$$

Acești trei vectori au proprietățile definite de relațiile:

$$\begin{aligned}
|\vec{l}_1| &= \sqrt{l_1(l_1+1)} \cdot \hbar, & l_1 &\in z_+; \\
l_{z1} &= m_1 \hbar, & m_1 &\in [-l_1, +l_1]; \\
|\vec{l}_2| &= \sqrt{l_2(l_2+1)} \cdot \hbar, & l_2 &\in z_+; \\
l_{z2} &= m_2 \hbar, & m_2 &\in [-l_2, +l_2]; \\
|\vec{L}| &= \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar, & l &\in z_+; \\
L_z &= m \cdot \hbar, & m &\in [-l, +l].
\end{aligned} \tag{9.33}$$

Rezulta că:

$$m = m_1 + m_2. \tag{9.34}$$

În situația în care se conservă lungimile vectorilor l_1, l_2 , proiecțiile lor pe \vec{L} , împreună cu \vec{L}_2 și l_z , se reprezintă vectorial astfel încât: vectorii \vec{l}_1 și \vec{l}_2 să efectueze o precesie în jurul lui \vec{L} iar aceasta să efectueze o precesie în jurul axei OZ (fig.9.5).

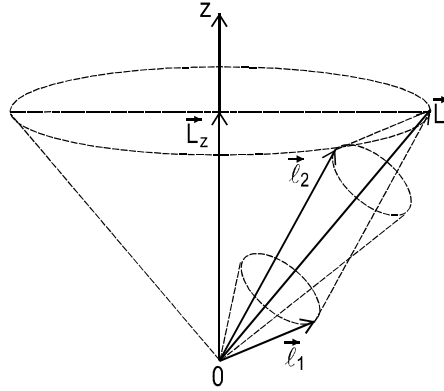


Figura 9.5

Operatorul moment cinetic total al electronului este prin definiție:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}. \tag{9.35}$$

Deci j^2 și j_z sunt cuantificați, admitând valorile proprii:

$$|\vec{j}| = \sqrt{j(j+1)} \cdot \hbar; \tag{9.36}$$

$$j_z = m_j \cdot \hbar, \quad m_j = -j, \dots, j,$$

unde numărul cuantic j , numit număr cuantic intern poate lua valorile:

$$j = l + S, \dots, |l - S|.$$

Deoarece numărul cuantic de spin are valoarea $1/2$ rezulta că

$$j = l + \frac{1}{2}, \quad l - \frac{1}{2}.$$

Regulile de selecție pentru numărul cuantic j sunt:

$$\Delta j = 0, \pm 1. \quad (9.37)$$

Electronul posedă un moment magnetic orbital $\vec{\mu}_l$ și unul de spin $\vec{\mu}_s$. Datorită anomaliei magnetice, momentul magnetic rezultat nu are aceeași direcție cu vectorul \vec{j} căci:

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s = -\mu_B (\vec{l}^* + 2\vec{s}^*) = -\mu_B (\vec{j}^* + \vec{s}^*), \quad (9.38)$$

unde $\vec{l}^*, \vec{s}^*, \vec{j}^*$ sunt respectiv momentele cinetice orbital, de spin și total, raportați la \hbar .

Dacă \vec{j} se conservă, vectorii \vec{l} , \vec{s} și $\vec{\mu}$ vor efectua o precesie în jurul lui \vec{j} (fig.9.6).

Valoarea medie a momentului magnetic total coincide cu proiecția lui $\vec{\mu}$ pe \vec{j} și se

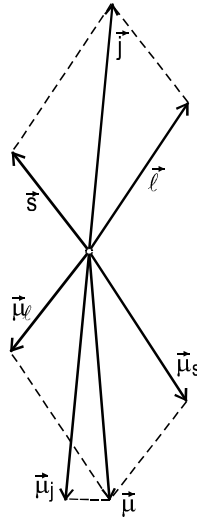


Figura 9.6

conserva. Experimental se determină aceasta valoare medie folosind relația:

$$\mu_{\text{exp}} = \mu_j = \vec{\mu} \cdot \frac{\vec{j}^*}{|\vec{j}^*|} = -\frac{\mu_B}{\sqrt{j(j+1)}} (\vec{j}^{*2} + \vec{j}^* \cdot \vec{s}^*). \quad (9.39)$$

Din egalitatea:

$$\vec{l}^* = \vec{j}^* - \vec{s}^*,$$

rezultă:

$$\vec{l}^{*2} = \vec{j}^{*2} + \vec{s}^{*2} - 2\vec{j}^* \cdot \vec{s}^*,$$

iar:

$$\vec{j}^* \cdot \vec{s}^* = \frac{\vec{j}^{*2} + \vec{s}^{*2} - \vec{l}^{*2}}{2} = \frac{j(j+1) + S(S+1) - l(l+1)}{2}. \quad (9.40)$$

Din expresiile (9.39) și (9.40) se obține:

$$\mu_j = -g_j \mu_B \sqrt{j(j+1)}, \quad (9.41)$$

unde:

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + S(S+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}, \quad (9.42)$$

se numește factorul giromagnetic al lui Landé.

9.9. Structura fină a liniilor spectrale

Fiecare electron dintr-un atom, cu mai mulți electroni, execută două mișcări, una orbitală și una de spin, având în același timp un moment cinetic orbital și un moment cinetic de spin. Dacă se notează cu \hat{l}_k și \hat{s}_k operatorii corespunzători momentelor cinetice orbitale și de spin, ale electronului K , operatorul moment cinetic total al sistemului de electroni este:

$$\hat{j} = \sum_k \left(\hat{l}_k + \hat{s}_k \right). \quad (9.43)$$

Dacă interacțiunea dintre momentele cinetice orbitale, respectiv dintre momentele cinetice de spin este mai pronunțată decât interacțiunea spin-orbită la nivelul fiecărui electron, momentele cinetice orbitale și cele de spin se compun separat, dând momentele cinetice totale \vec{L} și \vec{S} , iar prin cuplarea acestora se obține momentul cinetic total \vec{j} . Acest fel de compunere a momentelor cinetice se numește cuplaj normal sau cuplaj LS și se aplică în genere atomilor nu prea grei. La atomii mai grei există o puternică interacțiune spin-orbită, cuplajul numindu-se cuplaj JJ . În acest caz se însumează separat momentul orbital cu cel de spin pentru fiecare electron, iar apoi se însumează rezultatele obținând momentul cinetic total:

$$\vec{J} = \sum_k \vec{j}_k \quad (9.44)$$

Pentru analiza spectrelor radiațiilor emise de atomii cu mai mulți electroni se studiază structura nivelelor energetice atomice. În multe cazuri, înțelegerea structurii nivelelor energetice este posibilă dacă se considera doar cuplajul LS . Numerele cuantice ale întregului sistem de electroni, L, S, J, M , sunt respectiv numerele cuantice orbital, de spin, intern și magnetic intern al sistemului.

În situația în care lipsește interacțiunea LS , energia totală depinde doar de numerele cuantice L și S , iar în prezenta acestora, în locul unui nivel LS , apar mai multe nivele energetice având aceiași L și S dar cu J diferiți. Aceste nivele sunt puțin distanțate între ele, având o structură de multiplet numită structură fină. Ordinul de multiplicitate al nivelului este determinat de numărul valorilor posibile ale numărului cuantic intern total $J = L + S, \dots, |L - S|$. Dacă $L > S$, nivelul LS se despică în $2S + 1$ nivele, iar dacă $L < S$, nivelul are multiplicitatea $2L + 1$. Pentru un J dat, există $2J + 1$ stări pentru care $M_j = -J, \dots, +J$, ceea ce înseamnă că fiecare nivel din multiplet este de $2J + 1$ ori degenerat.

Structura fină a nivelelor energetice atomice atrage după sine și o structură fină de multiplet a liniilor spectrale.

Regulile de selecție corespunzătoare sunt:

$$\Delta \cdot J = 0, \pm 1,$$

cu excepția tranziției $J = 0 \rightarrow J = 0$.

Aplicații

9.7. Pornind de la ecuația Schrodinger atemporală pentru atomii hidrogenoizi, în coordonate sferice, să se deducă ecuația diferențială pentru funcția de undă radială $R(x)$.

Rezolvarea ecuației Schrodinger în coordonate sferice este:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{ze^2}{r} \psi \right] = E\psi$$

Ținând seama de forma operatorului \hat{l}^2 , se obține:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0 r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{2m_0 r^2} \hat{l}^2 \psi - \frac{Ze^2}{r} \psi = E \psi$$

Soluțiile sunt de forma: $\varphi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\theta, \varphi)$, deoarece:

$$\hat{l}^2 \cdot Y(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) \cdot Y(\theta, \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left[E + \frac{Ze^2}{2} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 r^2} \right] R = 0$$

9.8. La studiul spectrului hidrogenului obținut cu ajutorul unei rețele de difracție având perioada $d = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ se observă că una din liniile spectrale ale seriei Balmer, de ordinul doi corespunde unghiului $\theta = 30^\circ$. Să se determine cărei tranziții îi corespunde această linie.

$$\text{Se dă } R_H = 1096,77 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}.$$

9.9. Să se afle pentru care tranziție se obține linia k, cu lungimea de unda $\lambda = 6,97 \text{ \AA}$, știind că pentru aluminiu, constanta de ecranare $\sigma = 1,65$. Se dau $Z_{Al} = 13$, $R = 1,09737 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

9.10. Într-un atom de hidrogen are loc tranziția de la starea cu $n = 10$ la starea cu $n = 1$. Să se determine: a) energia, impulsul și lungimea de undă a fotonului emis; b) viteza de recul a atomului la emisia fotonului.

$$\mathbf{R:} \text{ a) } W = 13,5 \text{ eV; } p = 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m/s; } \lambda = 92 \text{ nm.}$$

$$\text{b) } v = 4,5 \text{ m/s.}$$

9.11. Viteza electronilor care cad pe anticatodul unui tub de raze X reprezintă jumătate din viteza luminii. Să se determine lungimea de undă dinspre lungimile de undă mici ale spectrului continuu de raze X. Se dau: $v = c/2$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

$$\mathbf{R:} \lambda_{\min} = 16 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

9.10. Emisia și absorbția radiației

Excitarea și ionizarea atomilor se poate realiza pe cale optică, pe cale termică sau pe cale electrică. Sistemele atomice pot trece de pe un nivel energetic pe altul prin tranziții radiative, emise sau absorbție de radiație electromagnetică sau neradiative.

Între stările energetice staționare ale unui sistem atomic pot avea loc tranziții, în sensul trecerii acestuia dintr-o stare energetica inferioară în alta superioară, când are loc un proces de absorbție de energie, sau dintr-o stare energetica superioară spre alta inferioară, când se emite energie. Legea cuantică fundamentală a radiației este: unde W_i și W_j reprezintă energia corespunzătoare celor două stări staționare între care are loc tranziția.

Această lege este valabilă atât în cazul nivelelor de energie cât și în cazul când nivelele de energie formează o succesiune continuă. Tranzițiile de pe nivele energetice superioare pe nivele energetice inferioare, care au loc de la sine, poartă numele de fenomene de emisie spontană.

În afară de absorbția și emisia radiației, o substanța poate să producă și împrăștierea radiației. Dacă o cuanta de radiație având frecvența ν_0 ciocnește un sistem atomic atunci radiația împrăștiată are frecvența:

$$\nu = \nu_0 + \frac{W_n - W_k}{h}. \quad (9.44)$$

Dacă $W_n = W_k$, fenomenul se numește împrăștierea Rayleigh în mediu omogen sau împrăștierea Tyndall în mediu tulbure. În acest caz, interacția dintre cuanta de lumină și sistemul atomic este elastică (fig. 9.7).

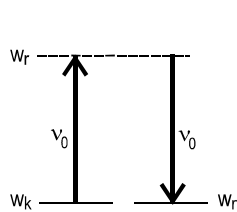


Figura 9.7

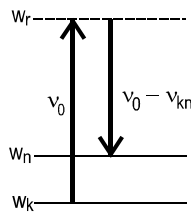


Figura 9.8

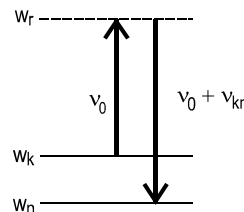


Figura 9.9

Dacă ciocnirea dintre cuanta de lumină și sistemul atomic este neelastică, se întâlnesc două situații:

1. Când sistemul atomic trece din starea cu energie W_k în starea cu energia superioară W_n prin intermediul stării virtuale W_r (fig. 9.8).

2. Când sistemul atomic trece din starea W_k în starea cu energia inferioară W_n prin intermediul stării virtuale W_r (fig.9.9).

În primul caz frecvența radiației împrăștiată este mai mică decât frecvența radiației incidente, iar linia spectrală se numește linie Stokes.

În al doilea caz frecvența radiației împrăștiată este mai mare decât frecvența radiației incidente, iar linia spectrală se numește linie anti-Stokes.

Fenomenul în urma căruia radiația împrăștiată își modifică frecvența iar sistemele cuantice trec în alte stări energetice, se numește efect Raman sau difuzie combinată a luminii.

Mărimea proporțională cu puterea radiantă a unității de volum este intensitatea liniei spectrale. Numărul de fotoni emiși spontan în unitatea de timp și de volum în urma tranzițiilor dintre W_i și W_k este:

$$z_{ik}^{(sp)} = A_{ik} n_i, \quad (9.45)$$

unde n_i reprezintă populația nivelului energetic având valoarea W_i iar A_{ik} este coeficientul lui Einstein pentru emisia spontană sau probabilitatea de emisie spontană. Prin populația n_i a unui nivel energetic W_i se înțelege numărul sistemelor atomice din unitatea de volum care au energia W_i . În general se măsoară intensitățile relative a doua linii spectrale:

$$\frac{I_{ik}}{I_{jl}} = \frac{\nu_{ik}}{\nu_{jl}} \cdot \frac{A_{ik}}{A_{jl}} \cdot \frac{g_i}{g_l} \exp^{-\frac{W_i - W_j}{kT}}. \quad (9.46)$$

În realitate nivelele energetice sunt caracterizate printr-un interval de energie, W_i numit lărgime a nivelului, iar tranzițiile au un interval îngust de frecvențe numit lărgime a liniei spectrale. Conform principiului de incertitudine a lui Heisenberg, în funcție de durata medie de viață τ_a unei stări excitate, se obține:

$$\Delta W \geq \frac{\hbar}{2\tau}. \quad (9.47)$$

$$\Delta\nu = \frac{\Delta W}{h} = \frac{1}{4\pi\tau}. \quad (9.48)$$

Lărgimea liniei spectrale datorate timpului mediu de viață, poartă numele de lărgime naturală. Lărgimea naturală este proporțională cu probabilitatea totală A_i a tranzițiilor spontane de pe nivelul considerat pe toate nivelele energetice inferioare.

$$\Delta\nu = \frac{1}{4} A_i. \quad (9.49)$$

Tranzițiile de pe nivele energetice superioare pe nivele energetice inferioare, care au loc sub acțiunea unei cauze exterioare, poartă numele de fenomene de emisie stimulată.

Dacă un ansamblu de sisteme atomice se află în prezența unei radiații cu densitatea de radiație $\rho(\nu)$; ele vor absorbi o anumită cantitate din energia radiației trecând în stări energetice superioare. Numărul de fotoni, $z_{ki}^{(abs)}$, absorbiți în unitatea de timp și de volum este proporțional cu populația n_k a nivel

$$z_{ki}^{(abs)} = B_{ki} n_k \rho(\nu), \quad (9.50)$$

unde B_{ki} se numește coeficientul lui Einstein pentru absorbție.

Un ansamblu de sisteme atomice pot trece de pe un nivel energetic superior pe un nivel energetic inferior prin emisie stimulată, dacă se afla în prezența unei radiații externe având frecvența egală cu frecvența radiației rezultate prin tranziția între cele două nivele (fig. 9.11).

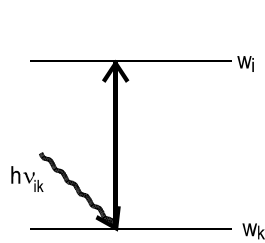


Figura 9.10

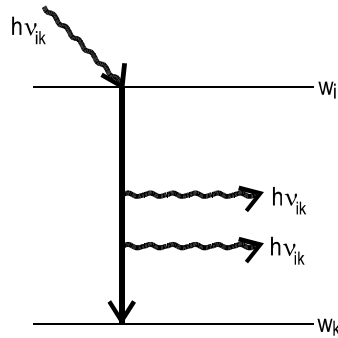


Figura 9.11

Numărul de fotoni $z_{ik}^{(st)}$, emiși stimulat în unitatea de timp și de volum, este proporțional cu populația n_i a nivelului superior și cu densitatea de radiație $\rho(\nu)$;

$$z_{ik}^{(st)} = B_{ik} n_i \rho(\nu), \quad (9.51)$$

unde B_{ik} este coeficientul lui Einstein pentru emisia stimulată.

Radiația obținută prin emisie stimulată are aceeași frecvență și este în fază cu cea externă. Radiația emisă stimulat poate să stimuleze alte tranziții. Acest fenomen conduce la amplificarea radiației incidente și reprezintă principiul de funcționare al generatoarelor și amplificatoarelor cuantice.

Amplificarea radiației se obține când energia emisia este mai mare decât cea absorbită, adică:

$$(n_i - n_k) B \cdot \rho(\nu) > 0. \quad (9.52)$$

Pentru nivelele care au același grad de degenerescență, $B_{ik} = B_{ki} = B$

Realizarea condiției $n_i > n_k$, numită inversiune de populație, se poate obține prin metoda pompajului optic (fig. 9.11). Radiația exterioară provenită de la un sistem special de lămpi este absorbită provocând tranzițiile de pe nivelul W_1 pe W_3 (fig. 9.12, a). La saturație, $n_3 \approx n_1$, iar $n_3 > n_2$, realizându-se inversiunea de populație.

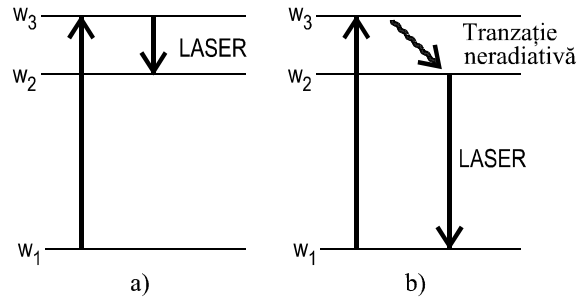


Figura 9.12

În cazul reprezentat prin figura 9.12, b, nivelul W_2 este metastabil, iar tranzițiile neradiative de pe nivelul W_3 pe nivelul W_2 produc o acumulare pe nivelul W_2 și în acest fel inversiunea de populație față de nivelul W_1 . Pe lângă realizarea inversiunii de populație, pentru obținerea amplificării

radiației este necesar ca pierderile în cavitatea în care are loc efectul laser să nu depășească puterea radiației obținute prin amplificare. Mediul activ în care sunt îndeplinite cele două condiții poate să fie solid, lichid sau gazos.

Radiația laser este coerentă, monocromatică, are intensitate foarte mare și direcționalitate.

9.11. Radiația Röntgen

În
interiorul
unui tub
care
conține
gaz la
presiuni

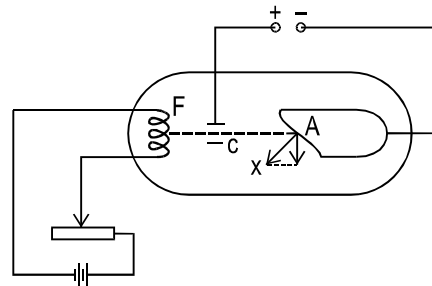


Figura 9.13

mai mici decât $0,13 \text{ N/m}^2$, se afla un filament care adus la incandescență emite electroni prin efect termoelectric. Electronii accelerați, lovesc anodul și în acest fel se generează radiații X care se propaga perpendicular pe suprafața lui (fig. 9.15).

Spectrul continuu apare ca rezultat al transformării energiei cinetice a electronilor în energie radiantă, în procesul de frânare a acestora, în materialul anodului și din aceasta cauză se numește și spectrul de frânare. Spectrul continuu este limitat în domeniul lungimilor de undă mici, valoarea lungimii de undă minime depinzând de tensiunea de accelerare, adică:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{e} \cdot \frac{1}{U}. \quad (9.53)$$

Dacă tensiunea de accelerare a electronilor depășește o anumită valoare critică, caracteristică materialului din care este confecționat anodul, atunci atomii acestuia emit un spectru de linii peste spectrul continuu. Spectrele X discontinui se obțin prin tranzițiile electronilor din profunzimea atomului. Procesul de emisie a spectrului discontinuu constă în excitarea

electronilor din păturile profunde ale atomilor de către electronii accelerați și apoi în redistribuirea electronilor atomului excitat.

Procesul de excitare a unui electron de pe pătura K a unui atom “greu” nu poate avea loc decât prin aducerea lui pe una din stările periferice sau prin smulgerea lui din atom, deoarece păturile L , M sunt ocupate. Numărul de undă a radiației emise este:

$$\tilde{\nu} = R(Z - \sigma_k)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right); n = 2, 3, \dots \quad (9.54)$$

Relația (9.54) a fost verificată pe cale experimentală de Moseley. Deoarece numai o mică parte din energia electronilor incidenți este emisă sub formă de raze X, restul transformându-se în căldură, anodul supus bombardării se încălzește puternic și din aceasta cauză trebuie confecționat dintr-un metal greu fuzibil.

Proprietățile razelor X sunt: impresionează placa fotografică; produc fluorescența unor substanțe; sunt absorbite de substanțe cu densitate mare; ionizează substanța; nu sunt deviate în câmpuri electrice și magnetice; exercită asupra țesuturilor vii o acțiune numită efect biologic.

Când radiațiile X parcurg o substanță apare fenomenul de scădere a intensității acestora numit atenuare, adică:

$$I = I_0 \exp^{-\mu x}, \quad (9.55)$$

unde I_0 este intensitatea radiației incidente pe substanța, iar μ este coeficientul liniar de atenuare.

$$\mu = \mu_{abs} + \mu_{dif}. \quad (9.56)$$

Aplicații

9.12. Intensitatea unui fascicul îngust de radiații scade de 8 ori după ce străbate un strat de plumb de grosime $4 \cdot 10^{-2}$ m. Să se calculeze grosimea de înjumătățire.

Rezolvare:

$$i = i_0 \cdot e^{-\mu x}; \quad i = \frac{i_0}{8}; \quad \frac{i_0}{8} = i_0 \cdot e^{-\mu x}; \quad \frac{1}{8} = e^{-\mu x}; \quad 8 = e^{+\mu x};$$

$$\ln 8 = \mu x \Rightarrow x = \frac{1}{\mu} \ln 8 \Rightarrow \mu = \frac{\ln 8}{x}$$

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-\mu x_1}; \quad x_1 = \frac{\ln 2}{\mu} = x \cdot \frac{\ln 2}{\ln 8} = 0,0133 \text{ m.}$$

9.13. Să se calculeze grosimea unui strat de Pb care atenuează de zece ori intensitatea unui fascicul de radiații cu energia de 2MeV. Coeficientul de absorbție a radiației cu energia $W=2\text{MeV}$, în plumb, este $\mu=0,5\text{cm}^{-1}$.

$$\mathbf{R:} \quad x = \frac{1}{\mu} \ln \frac{I_0}{I} = 4,6 \text{ cm.}$$

10. FIZICA SOLIDULUI

Celula elementară poate fi caracterizată prin vectorii de baza \vec{a}_i și prin unghiurile α_{ij} formate din cate doi vectori de baza \vec{a}_i și \vec{a}_j (fig.10.1).

Sistemul de mărimi liniare \vec{a}_i și unghiurile α_{ij} formează parametrii rețelei care definesc forma, dimensiunile și simetria celulei elementare.

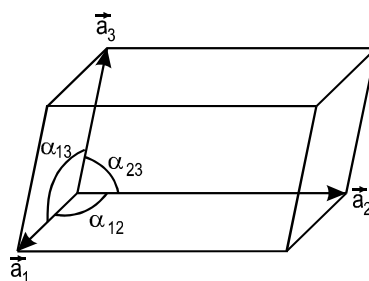


Figura 10.1

Prin parametrii celulei elementare se exprimă și volumul ei:

$$\Omega_0 = [\vec{a}_1 (\vec{a}_2 \vec{a}_3)] = [\vec{a}_3 (\vec{a}_1 \vec{a}_2)] = [\vec{a}_2 (\vec{a}_3 \vec{a}_1)],$$

care reprezintă produsul mixt al vectorilor de baza.

Numărul nodurilor dintr-o celulă elementară primitivă sau neprimitivă se stabilește cu ajutorul relației:

$$n = n_i + \frac{n_f}{2} + \frac{n_c}{8},$$

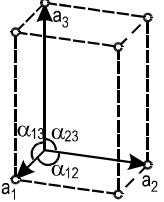
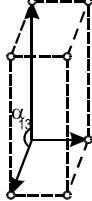
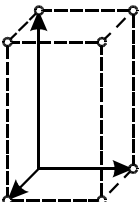
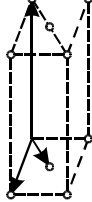
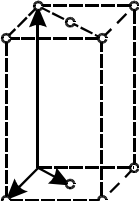
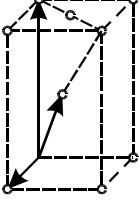
unde: n_i -este numărul nodurilor interioare;

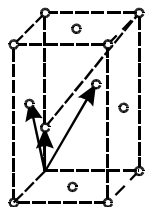
n_f -numărul nodurilor de pe fețe; n_c -numărul nodurilor din colțuri.

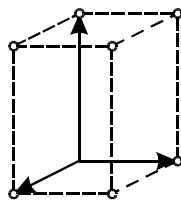
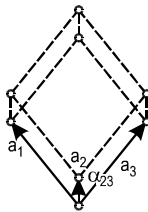
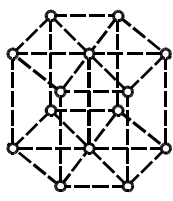
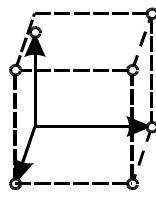
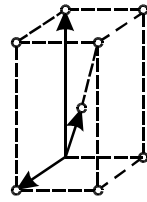
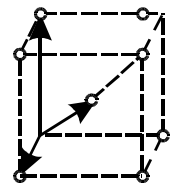
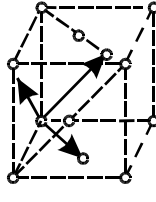
Alegerea celulei elementare cu unul sau mai multe noduri se face în funcție de simetria celulei. Importanța rețelelor Bravais în cristalografie este foarte mare, pentru că pe baza lor se poate clasifica întreaga varietate cristalografică cunoscută în natură în sensul că orice varietate de cristal, dacă este o rețea simplă, aparține uneia din cele paisprezece rețele Bravais. În caz contrar, dacă este o rețea complexă, prin descompunere poate fi redusă la o rețea Bravais.

În tabelul 10.1 sunt prezentate caracteristicile sistemului de rețele Bravais după singonii și variațiile de centrare.

Tabelul 10.1 – Caracteristicile sistemului de rețele Bravais

Singonia Tipul rețelei	Triclinică	Monoclinică	Rombică
Primitivă	 $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ $\alpha_{23} \neq \alpha_{13} \neq \alpha_{12} \neq 90^\circ$	 $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \quad \alpha_{13} \neq 90^\circ$ $\alpha_{23} = \alpha_{12} = 90^\circ$	 $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = 90^\circ$
Bază centrată		 $a_1 \neq a_2 = a_3 \quad \alpha_{13} \neq 90^\circ$ $\alpha_{23} = \alpha_{12} = 90^\circ$	 $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = 90^\circ$
Volum centrat			 $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = 90^\circ$

Singonia Tipul rețelei	Triclinică	Monoclinică	Rombică
Fete centrate			 $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = 90^\circ$

Tetragonală	Trigonală	Hexagonală	Cubică
 $a_1 = a_2 \neq a_3$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = 90^\circ$	 $a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} \neq 90^\circ$	 $a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha_{12} \neq 120^\circ$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = 90^\circ$	 $a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = 90^\circ$
 $a_1 = a_2 \neq a_3$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = 90^\circ$			 $a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = 90^\circ$
			 $a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = 90^\circ$

Dacă în nodurile celor paisprezece rețele Bravais se dispun atomi sau ioni caracterizați printr-un moment permanent de spin și orbital, atunci numărul rețelilor Bravais cristalografice se completează cu încă treizeci și doua de tipuri.

Dacă prin trei puncte sau noduri ale rețelei cristaline se duce un plan, el va întâlni și alte noduri și va construi deci un plan reticular.

În figura 10.2, planul ABC taie pe cele trei muchii ale rețelei paralelipipedice segmentele; $OA = 2 \cdot a_1$; $OB = 2 \cdot a_2$; $OC = 2 \cdot a_3$.

Acest plan reticular este paralel cu un alt plan reticular de parametri $\left(\frac{1}{2}\right)OA = a_1$; $\left(\frac{1}{2}\right)OB = a_2$; $\left(\frac{1}{2}\right)OC = a_3$. Se constată că orice plan reticular din rețeaua spațială este determinat de către un sistem de trei parametri care formează raportul: $m_1 a_1 \cdot m_2 a_2 \cdot m_3 a_3$.

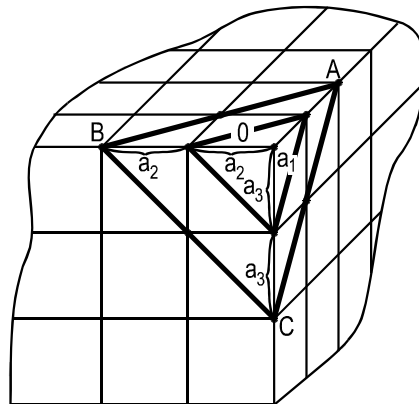


Figura 10.2

10.1. Defecte în rețea

Starea de echilibru a unui solid la o temperatură dată T , la presiuni exterioare mici, este determinată de valoarea minimă a energiei libere:

$$F = E - TS. \quad (10.1)$$

Această condiție conduce, în mod necesar, la existența unei dezordini în rețea la temperaturi $T > 0K$. Cele mai simple exemple de dezordine în

rețeaua cristalină sunt locurile vacante $[V]$ în rețea și atomii interstițiali $[I]$ prezentate în fig. 10.3.

Atomii interstițiali sunt aceia care ocupa poziții în locurile din rețea care într-o rețea perfectă ar fi neocupate. Între entropia termică S_t și entropia configurației S_{cf} , există o deosebire. Entropia termică este determinată de numărul de posibilități W_t diferite, în care energia de vibrație totală a cristalului se poate afla pe modurile posibile de vibrație.

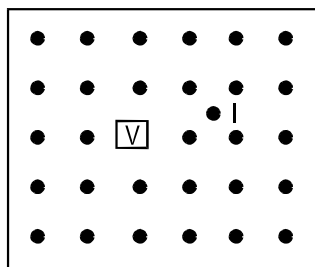


Figura 10.3

Conform legii lui Boltzmann, legătura dintre W_t și entropia S_t este:

$$S_t = k \cdot \ln \cdot W_t. \quad (10.2)$$

Entropia de configurație a unui cristal nu depinde de distribuția energiei, ea fiind determinată de numărul de locuri accesibile ale rețelei cristaline. Fie, de exemplu, o rețea ce conține N_A atomi de tip A și N_B atomi de tip B . Se considera că nodurile rețelei sunt toate echivalente, în sensul că ele pot fi ocupate atât de atomi de tip A cât și de tip B . În aceste condiții, numărul de posibilități W_{cf} , de aranjare a celor N_A atomi de tip A și N_B atomi de tip B , pe toate nodurile de rețea este dat de relația:

$$W_{cf} = \frac{(N_A + N_B)!}{N_A! N_B!}. \quad (10.3)$$

Entropia de configurație este dată de expresia:

$$S_{cf} = k \cdot \log W_{cf} = k \cdot \log \left[\frac{(N_A + N_B)!}{N_A! N_B!} \right]. \quad (10.4)$$

Pentru un cristal ce conține atomi identici, fără nici un defect de rețea, $W_{cf} = 1$ și din $S_{cf} = 0$, deoarece există numai un aranjament posibil al atomilor. Entropia totală este egală cu suma celor două componente:

$$S = S_t + S_{cf} . \quad (10.5)$$

Rezultatele obținute pot fi folosite pentru explicarea cauzei existenței defectelor de rețea la temperaturi $T > 0K$. Se presupune că într-un cristal perfect se produc un număr de locuri vacante în rețea transferându-se atomi din interiorul cristalului la suprafața lui. În această situație este nevoie de o energie oarecare, ceea ce este nefavorabil din punct de vedere termodinamic. Prin crearea vacanțelor, crește dezordinea în cristal și entropia de configurație de la zero la o anumită valoare determinată de numărul n de vacanțe produse. Conform relației (10.21), entropia de configurație asociată cu

aranjările posibile ale celor N atomi și celor n vacanțe peste numărul total $(N + n)$ de noduri din rețea este:

$$S_{cf} = k \cdot \log \frac{(N + n)!}{N!n!} . \quad (10.6)$$

Creșterea entropiei micșorează energia liberă și acest fapt devine favorabil din punct de vedere termodinamic. Ca rezultat al celor două tendințe opuse, între energia E , pe de o parte, și entropie, pe de alta parte, configurația stabilă, se obține când o anumită parte din nodurile rețelei cristaline este preocupată.

În figura 10.4 se dă reprezentarea grafică a energiei și entropiei de configurație, în funcție de fracția de poziții vacante n/N . Minimul energiei libere F , determină valoarea de echilibru a raportului n/N .

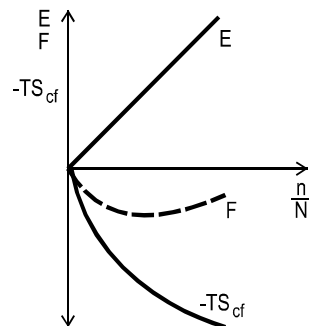


Figura 10.4

Se consideră o rețea perfectă ce conține N atomi identici la o temperatura T ; energia liberă se notează cu $F_p(T)$. Se presupune că s-au creat n vacanțe în rețea și că energia ϕ_v , necesară pentru crearea unei vacanțe este independentă de n și că doua vacanțe nu sunt vecine între ele. Energia cristalului crește, devenind $n\phi_v$. Entropia de configurație a cristalului imperfect este data de relația 10.23. Entropia termică crește per vacanță cu cantitatea ΔS_t . Energia liberă a unui cristal imperfect are expresia:

$$F(n, T) = F_p(T) + n\phi_v - nT\Delta S_t - kT \log \frac{(N+n)!}{N!n!}. \quad (10.7)$$

Pentru găsirea valorii de echilibru a lui n se folosește condiția de minim: $(\partial F / \partial n)_T = 0$. Folosind relația lui Stirling $\log x! = x \log x - x$, pentru $x \gg 1$, se obține:

$$\frac{n}{N+n} \approx \frac{n}{N} = \exp \frac{\Delta S_t}{k} \cdot \exp \frac{-\phi_v}{kT}, \quad \text{deoarece } n \gg N. \quad (10.8)$$

Probabilitatea ca un nod al rețelei să fie neocupat, este data de factorul Boltzmann ce conține energia ϕ_v de formare a unei vacanțe. Tipurile acestea de vacanțe sunt de tip Schottky.

Alte tipuri de defecte de rețea pot fi tratate în mod analog ca și vacanțele. Defectele de tip Frenkel se formează când un atom, care inițial a ocupat poziții în nodurile rețelei, migrează în pozițiile interstițiale ale rețelei. Un defect Frenkel constă din doua componente: o vacanță și un atom interstițial.

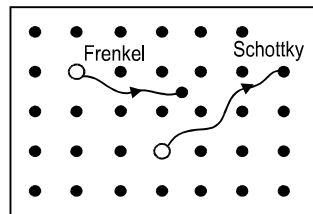


Figura 10.5

Numărul de defecte Frenkel la echilibru și la temperatura T este:

$$n = (N \cdot N)^{1/2} \cdot \exp \frac{\Delta S_f}{2k} \cdot \exp \frac{-\phi_F}{2kT} \quad n \gg N, \quad (10.9)$$

unde: N este numărul de atom; N_i - numărul de poziții interstițiale posibile; S_f - variația entropiei termice corespunzătoare unui defect Frenkel; ϕ_F este energia de formare a unui defect Frenkel. În figura 10.5, se prezintă în secțiune plană modelul defectelor Schottky și a defectelor Frenkel.

Formarea unui defect Frenkel se poate scrie sub forma unei relații de echilibru: un nod de rețea ocupat + un loc interstițial neocupat \Leftrightarrow o vacanță + un atom interstițial.

Aplicații

10.1. În cazul unui cristal anizotrop, energia ca funcție de componentele vectorului de undă, poate fi scrisă sub forma:

$$E = \alpha_x k_x^2 + \alpha_y k_y^2 + \alpha_z k_z^2.$$

Să se găsească ecuația de mișcare, corespunzând ecuației Newton.

Rezolvare: Mișcarea electronului în cristal sub acțiunea unei forțe F

este descrisă de ecuația: $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m^*} = \frac{F}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2}$

$$\text{În acest caz: } \frac{d^2 E}{dk^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial k_x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial k_y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial k_z^2} = 2(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z).$$

$$\text{Ecuația de mișcare a electronului: } \frac{dv}{dt} = \frac{2F}{\hbar^2} (\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z).$$

10.2. Se consideră un kilomol de cristal format din atomi identici așezați într-o rețea tridimensională. Fiecare atom poate executa oscilații armonice după fiecare din cele trei direcții, independent de atomii vecini. Din teoria semicuantică se știe că energia unui astfel de oscilator este $E_n = n\hbar\nu$.

- Să se calculeze energia medie pentru un astfel de sistem.
- Să se calculeze căldura molară.

Rezolvare:

$$\begin{aligned}
\text{a) } E &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h \nu \cdot \exp^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}} . \text{ Se notează: } \exp^{-\frac{n h \nu}{k_B T}} = x \\
\bar{E} &= \frac{h \nu \sum_{n=0}^{\infty} n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \frac{h \nu x}{(1-x)^2} \frac{(1-x)}{1} = \frac{h \nu x}{1-x} = \frac{h \nu}{\exp^{h \nu / k_B T} - 1} \\
\text{b) } U &= 3 N_A \bar{E} = 3 N_A \frac{h \nu}{\exp^{h \nu / k_B T} - 1}, \quad C_V = \frac{3 N_A k_B (h \nu / k_B \cdot T)^2}{(\exp^{h \nu / k_B T} - 1)^2} \exp^{h \nu / k_B T}
\end{aligned}$$

10.2. Clasificarea solidelor în metale, semiconductori și izolatori

Teoria benzilor de energie tine seama de ecuația lui Schrödinger pentru electronii aflați în rețeaua cristalină. Electronii ocupă diferite nivele energetice în cadrul unor benzi permise. Reparația electronilor pe aceste nivele se face conform statisticii Fermi-Dirac, iar numărul de electroni n_i de pe nivelul W_i este dat de relația:

$$n_i = \frac{2}{\exp \frac{W_i - W_F}{kT} + 1} . \quad (10.10)$$

Aceasta distribuție este dependentă de nivelul Fermi la o temperatură data. La metale, la temperatura de zero absolut, nivelul Fermi este situat în cadrul unei benzi permise (fig.10.6, a) iar la semiconductori și izolatori, este într-o bandă interzisă de lățime V (fig.10.6, b și 10.6, c). Ultima bandă, parțial sau complet ocupata, se numește banda de valență ($B.V.$), iar prima bandă complet liberă, se numește banda de conducție ($B.C.$). Pentru metale monovalente banda de valență ($B.V.$) conține nivele libere. La metale cu valența mai mare, $B.C.$ și $B.V.$ se suprapun. Într-un metal, electronii au la dispoziție nivele libere chiar în $B.V.$ sau în banda următoare $B.C.$, deoarece nu există interval interzis între acestea.

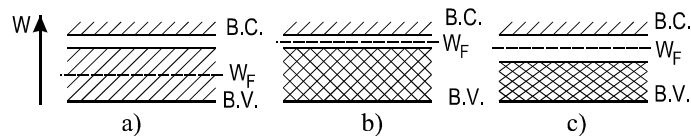


Figura 10.6

La temperatura $0K$, semiconductorii sunt niște izolatori, dar cu creșterea temperaturii, o parte din electroni pot trece în $B.C.$ deoarece intervalul interzis este mai îngust decât la izolatori.

La izolatori, electronii de valență sunt strâns legați de atomii rețelei cristaline și nu pot trece peste intervalul interzis, fără un surplus însemnat de energie din exterior.

Dacă temperatura corpului se mărește suficient de mult, datorita energiei termice pe care o primesc, unii electroni pot trece din zona de valență în zona imediat superioară, devenind electroni de conducție. În cazul semiconductorilor este suficienta temperatura camerei, iar în cazul izolatoarelor trebuie temperaturi foarte ridicate. Apare astfel o conductibilitate electrică a corpului, mai mult sau mai puțin pronunțată.

Izolatorii și semiconductorii mai pot prezenta conducție electrică sub acțiunea altor agenți ca: radiațiile electromagnetice, câmpurile electrice puternice sau chiar prin introducerea de electroni în baza de conducție cu ajutorul unor contacte metalice.

Semiconductorii sunt de două tipuri: cu conductibilitate intrinsecă (proprie) și cu conductibilitate cu impurități (extrinsecă).

Conductibilitatea intrinsecă apare ca rezultat al trecerii electronilor de pe nivelele superioare ale zonei de valență, în zona de conducție.

Astfel în zona de conducție apar purtători de sarcină, adică electroni, ce ocupa nivelele inferioare ale acestei zone și simultan, în zona de valență se eliberează un număr egal de locuri pe nivelele superioare. Locurile eliberate de electroni, pe nivelele ce erau ocupate în zona de valență la $0K$, se numește goluri, fig. 10.7.

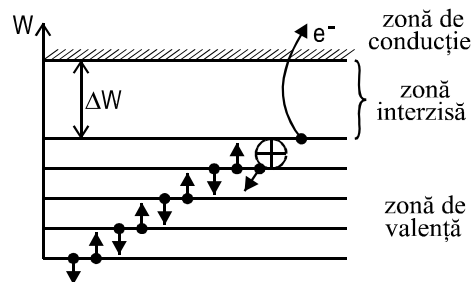


Figura 10.7

Distribuția electronilor pe nivelele zonei de valență și ale zonei de conducție se determina cu ajutorul funcției Fermi:

$$f(W) = \frac{1}{\exp \frac{W-W_F}{kT} + 1} \quad (10.11)$$

Pentru electronii ce se află în zona de conducție, mărimea $W - W_F$ este mult mai mare decât energia mișcării termice kT , deoarece la semiconductori:

$$W - W_F \approx 1 \cdot \text{eV}$$

$$kT \approx 10^{-4} \text{ eV, la } 1\text{K}$$

$$kT \approx 1/40 \text{ eV, la } 300\text{K}$$

În relația 10.28 se poate neglija unitatea de la numitor și în acest caz se obține distribuția Boltzmann:

$$f(W) = \exp \frac{W-W_F}{kT} = \text{const.} \exp \frac{\Delta W}{kT} \quad (10.12)$$

Numărul de electroni ce trece în zona de conducție este evident, proporțional cu probabilitatea 10.12, fiind dat de expresia:

$$n = N_c \exp \frac{\Delta W}{kT} \quad (10.13)$$

Unde N_c reprezintă densitatea efectivă a stărilor energetice din zona de conducție.

Conductibilitatea extrinsecă apare, dacă unii atomi ai unui semiconductor sunt înlocuiți în nodurile rețelei cristaline prin atomi a căror valență se deosebește cu o unitate fata de valența atomilor de baza. Adăugarea de impurități la un semiconductor se numește dopaj.

Un semiconductor cu impuritate pentavalentă posedă conducție electronica sau este un semiconductor de tip n . Atomii de impurități care furnizează electronii de conducție se numesc donori.

Impurităților deformează câmpul rețelei, fapt care conduce la apariția în schema energetica a unor nivele de energie locale, dispuse în zona interzisă

a cristalului – fig. 10.8. Un electron poate avea energia corespunzătoare unui nivel local numai dacă se afla în apropierea atomului de impuritate care produce apariția acestui nivel. Când nivelele donoare sunt în apropierea zonei de conducție, energia mișcării termice, chiar la temperaturi obișnuite, este suficientă pentru a transfera electronul de pe nivelul donator, în zona de conducție.

Într-un semiconductor cu impuritate trivalentă purtătorii de curent sunt golurile pozitive, iar semiconductorul este de tip p . Impuritățile care produc goluri se numesc acceptori.

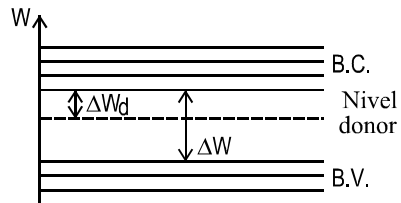


Figura 10.8

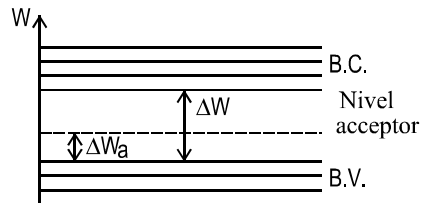


Figura 10.9

Pe schema nivelelor, (fig.10.9) acceptorul îi corespunde un nivel local (acceptor) în zona interzisă, în apropierea zonei de valență. Formarea golului are loc ca urmare a trecerii unui electron din zona de valență pe nivelul acceptor.

Dacă se iau în considerare semiconductorii tipici siliciul și germaniul care sunt elemente din grupa a IV-a sistemului periodic, se pot utiliza ca elemente de tip donator unele din elementele din grupa V, iar ca impurități de tip acceptor, unde elemente din grupa III.

Aplicații

10.3. Se consideră un kilomol de cristal format din N_A atomi identici așezați într-o rețea tridimensională și care execută mișcări oscilatorii cuplate. În aceste condiții cristalul poate fi privit ca un sistem de N_A puncte

materiale legate elastic, cu $3N_A$ grade de libertate. Să se calculeze căldura molară.

Rezolvare:

$$U = \int_0^{\omega_m} E(\omega) dg(\omega), \text{ unde } dg_{\omega} \text{ reprezintă numărul oscilațiilor normale}$$

ale rețelei cristaline cu frecvențele cuprinse în intervalul $\omega, \omega + d\omega$.

În acest caz : $dg_{\omega} = 9N_A \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_m^3}$, cu frecvență maximă de oscilație a rețelei ω .

$$U = \frac{9N_A}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} E(\omega) \omega^2, \text{ în care } E = \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{\exp^{\hbar \omega / k_B T} - 1}$$

$$U = \frac{9N_A}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \left(\frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{\exp^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \right) \omega^2 d\omega$$

$$3N_A \left(\frac{3}{8} \hbar \omega_m \right) + \frac{9N_A}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^2 d\omega}{\exp^{\hbar \omega / k_B T} - 1}$$

În relația anterioară se notează energia de zero cu $U_o = 3N_A \left(\frac{3}{8} \hbar \omega_m \right)$.

$$\text{Deci : } U = U_o + \frac{9N_A \hbar}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp^{\hbar \omega / k_B T} - 1}$$

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{9N_A \hbar^2}{\omega_m^3 k_B T^2} \int_0^{\omega_m} \frac{e^{\hbar \omega / k_B T} \omega^4 d\omega}{\left(\exp^{\hbar \omega / k_B T} - 1 \right)^2}$$

Introducându-se variabila $x = \frac{\hbar \omega}{k_B T}$, se obține :

$$C_v = 9N_A k_B \frac{k_B^3}{\hbar^2 \omega_m^3} T^3 \int_0^{x_m} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}.$$

Definind temperatura Debye prin relația : $\hbar \omega_m = k_B \theta_D$, \Rightarrow

$$C_v = 9N_A k_B \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{x_M} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}.$$

11. FIZICA NUCLEULUI ATOMIC

11.1. Energia de legătură a nucleului. Forțe nucleare

Experimental se observă că nucleele au o stabilitate remarcabilă datorită unor forțe de tip special numite forțe nucleare.

Proprietățile forțelor nucleare sunt:

- acționează la distanțe mici, de aproximativ 10^{-15} m ;
- sunt independente de sarcină, având aceeași valoare, indiferent de natura nucleonilor între care acționează;
- sunt forțe atractive;
- sunt forțe de saturație, fiecare nucleon neinteracționând decât cu un număr limitat de nucleoni învecinați;
- nu sunt forțe centrale, depinzând de orientarea spinilor nucleonilor care interacționează și de distanța dintre nucleoni.

Natura forțelor nucleare se poate stabili dacă se consideră că ele apar în urma unui schimb de particule între nucleoni. Cu privire la natura particulelor de schimb, Yukawa consideră existența unui câmp de forțe de tip nou, câmpul mezonice, în care particula de schimb este pionul π , a cărei masă de repaus este mult mai mare decât a electronului:

$$m_{\pi} \approx 270 m_e.$$

Ulterior, aceste particule au fost descoperite în radiația cosmică și se admite că pionii π^+ , π^- și π^0 realizează legăturile nucleare prin intermediul transformărilor:

$$\begin{aligned} p &\leftrightarrow n + \pi^+; \\ n &\leftrightarrow p + \pi^-; \\ p &\leftrightarrow p + \pi^0; \\ n &\leftrightarrow n + \pi^0. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Schimbul de pioni se realizează în mod continuu.

Determinările spectografice au arătat că masa nucleelor este diferită de suma maselor nucleonilor componenți. Dacă se consideră un nucleu X , format din Z protoni și $A-Z$ neutroni, se constată că:

$$m_x \neq m_z + m_{(A-Z)}.$$

Diferența de masă care apare:

$$\Delta m = m_z + m_{(A-Z)} - m_x, \quad (11.2)$$

este numită defect de masă.

Acestuia îi corespunde energia: $\Delta W = c^2 \Delta m$ denumită energia de legătură a nucleonilor în nucleu sau energia de legătură a nucleului.

Mărima $\Delta W / A$ reprezintă energia specifică de legătură a nucleului sau energia medie de legătură raportată la un nucleon. Variația valorii absolute a energiei de legătură pe nucleon, în funcție de numărul de nucleoni, este redată în fig. 11.1.

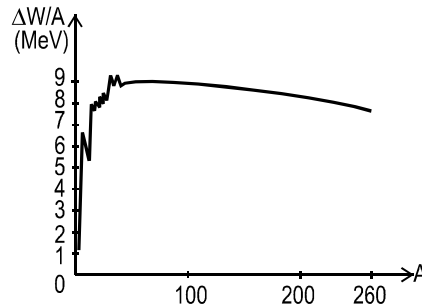


Figura 11.1

Din figură se observă că pentru valori mici ale lui A , valoarea absolută a energiei de legătură pe nucleon crește și prezintă maxime la elementele care au numărul de masa multiplu de patru ca: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$. Deci în nucleu exista tendința de a se forma grupări stabile de patru nucleoni. Valoarea absolută maximă a energiei de legătură pe nucleon, $8,7\text{MeV}$, o au elementele situate în mijlocul sistemului periodic având $28 < A < 138$, elemente care prezintă o stabilitate maximă. Pentru $A > 140$, valoarea absolută a energiei de legătură scade până la $7,6\text{MeV}$ pentru ${}^{238}_{92}\text{U}$.

11.2. Spinul nuclear

Existența spinului electronic a fost pusă în evidență de structura de multiplet a liniilor spectrale, numită structura fină. Folosindu-se instalații spectrale cu putere de rezoluție foarte mare, s-a găsit că liniile spectrale au o structură mult mai complexă, alcătuind așa-numita structură hiperfină a liniilor spectrale, care s-a putut explica pe baza ipotezei existenței spinului nuclear.

Prin moment cinetic total al nucleului, numit și spinul nucleului \vec{I} , se înțelege suma vectorială dintre momentul cinetic orbital și momentul cinetic propriu al nucleonilor care alcătuiesc nucleul. Modulul spinului nuclear este o mărime cuantificată:

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)} \cdot \hbar, \quad (11.3)$$

unde I este numărul cuantic al spinului nuclear, care se determină experimental din raportul intensităților componentelor structurii hiperfine.

Pentru diverse nuclee, I ia una din valorile:

$$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \dots$$

Se observă că nucleele cu număr de masă A par, au spin întreg și sunt bosoni, iar nucleele cu număr A impar, au spin semiîntreg și sunt fermioni.

Proiecția spinului nuclear pe o direcție privilegiată Oz este cuantificată:

$$I_z = m_I \cdot \hbar \quad (11.4)$$

Unde m_I este numărul cuantic al proiecției spinului nuclear pe axa Oz , numit și număr cuantic magnetic de spin nuclear și care poate lua $2I+1$ valori cuprinse între $-I$ și $+I$.

11.3. Modele nucleare

Modelul picăturii trasează statistic nucleonii și se bazează pe analogia dintre nucleu și o picătură de lichid incompresibil. Din aceasta analogie rezultă că:

- forțele nucleare sunt forțe de saturație, deoarece se exercită numai între nucleonii învecinați;
- densitatea substanței nucleare este constantă;
- la suprafața nucleului se manifestă fenomenul de tensiune superficială, în sensul că asupra nucleonilor aflați la marginea nucleului acționează doar forțele de atracție ale nucleonilor interiori;
- energia de legătură pe nucleon este constantă.

Cu ajutorul modelului de nucleon în forma de picătură se poate explica procesul fisiunii nucleare, stabilitatea nucleelor, precum și expulzarea nucleonilor din nucleu. Dar, reacțiile nucleare, care au loc cu particule proiectil de mare energie, nu pot fi explicate folosind acest model întrucât nu există suficient timp pentru ca această energie să se împartă pe toți nucleonii.

Modelul păturilor consideră că nucleonii interacționează slab între ei. Ca rezultat al acestui model, se obține o distribuție a nucleonilor pe anumite paturi energetice, asemănător electronilor din atom. Ideea de bază a modelului în pături a nucleului constă în aceea că nucleul poate fi descris, considerând că fiecare nucleon se mișcă independent în câmpul mediu creat de restul nucleonilor.

Modelul păturilor nucleare descrie comportarea nucleelor ușoare, explică existența numerelor magice, clarifică izomeria nucleară. Izomerii sunt nuclizi care diferă prin însușirile lor radioactive.

Modelul generalizat al nucleului reprezintă o îmbinare a modelului picătură cu cel al păturilor. Conform acestui model, nucleul este alcătuit dintr-un miez în formă de picătură, format din paturi nucleonice complete, înconjurat de nucleoni exteriori cuplați între ei și cu miezul. Mișcarea nucleonilor exteriori produce deformarea miezului. Acest model explică valorile momentelor magnetice nucleare, precum și spectrul energetic al stărilor de rotație ale unor nuclee.

11.4. Radioactivitatea. Legile emisiei nucleare

Radioactivitatea este proprietatea nucleelor unor elemente de a se transforma în alte nuclee, prin emisia de radiații alfa, beta, gama.

Radiațiile alfa sunt nuclee de heliu ${}^4_2\text{He}$. Radiațiile beta sunt electroni sau pozitroni. Radiațiile gama sunt unde electromagnetice cu lungimea de undă de ordin $10^{-11} \div 10^{-13} \text{ m}$.

Soddy și Fajans au stabilit două legi de deplasare radioactivă, cu ajutorul cărora se poate stabili ce elemente iau naștere prin dezintegrare.

1. În urma emisiei unei particule alfa se formează un element nou care este deplasat în tabelul periodic cu două căsuțe la stânga față de cel care a emis particula alfa, iar masa atomică a noului element este mai mică cu patru unități. Formula de deplasare radioactivă are forma:



2. În urma emisiei unei particule beta se formează un element nou situat în tabelul periodic cu o căsuță la dreapta, care are practic masa neschimbată. Elementul care ia naștere este un izobar al elementului care s-a dezintegrat. Formulele pentru emisia beta negativă și beta pozitivă sunt:



unde e^- și e^+ reprezintă un electron respectiv un pozitron, iar cu $\tilde{\nu}$ și ν s-au notat antineutrino și neutrino.

Deoarece în cazul dezintegrărilor radioactive se produce un număr foarte mare de procese de dezintegrare în unitatea de timp, aceste fenomene se supun unei legi statistice.

Dacă se admite că dN nuclee ale unei substanțe radioactive se dezintegrează în intervalul de timp infinit de mic dt , atunci raportul dN/dt , numit viteză de dezintegrare, este proporțional cu numărul de nuclee rămase nedezintegrate N , adică:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N. \quad (11.7)$$

Semnul minus arata că N scade un timp. Coeficientul λ se numește constanta radioactivă a nuclidului respectiv și arată fracțiunea de nuclee existente ce se dezintegrează în unitatea de timp. Constanta λ reprezintă probabilitatea dezintegrării individuale în unitatea de timp a nucleelor unei specii radioactive și este aceeași pentru toate nucleele aceleiași specii.

Numărul de nuclee N , ce rămân nedezintegrate din cantitatea inițială N_0 , poate fi stabilit cu ajutorul relației:

$$N = N_0 \exp^{-\lambda t}. \quad (11.8)$$

Pentru determinarea constantei de dezintegrare și pentru a caracteriza stabilitatea unui element radioactiv se folosește timpul de înjumătățire T , care se definește ca fiind intervalul de timp în care numărul de nuclee radioactive caracterizate prin constanta de dezintegrare λ se reduce la jumătate. În acest caz relația (11.8) devine:

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{2} &= N_0 \exp^{-\lambda T}; \quad \frac{N}{N_0} = \exp^{-\lambda T} = \frac{1}{2}; \\ \lambda T &= \ln 2; \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Pentru durata medie de viață a fiecărui nucleu $\tau = 1/\lambda$, timpul de înjumătățire devine $T = 0,693 \cdot \tau$.

Aplicații

11.1. Să se calculeze energia degajată prin formarea a $4,003 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ de heliu din protonii și neutronii corespunzători.

$$\begin{aligned} \mathbf{R:} \quad W_o &= [z \cdot m_p + (A - Z)m_n - M_z^a] \cdot 931,478 \text{ MeV}; \\ W &= N_A \cdot W_o = 173,92 \cdot 10^{17} \text{ MeV}. \end{aligned}$$

11.5. Interacțiunea radiațiilor nucleare cu substanța

La trecerea prin substanță se pot produce trei feluri de interacțiuni: nucleare puternice, electromagnetice, slabe.

Interacțiunile tari au loc între hadroni, care cuprind barionii, pionii și mezonii K ; acestea sunt de ordinul de mărime al interacțiunilor din nucleu și au o durată de 10^{-10} s.

Interacțiunile electromagnetice durează 10^{-16} s și se realizează printr-un schimb “virtual” de fotoni. Interacțiunile slabe au o durată de $10^{-8} \div 10^{-10}$ s și se manifestă între leptoni care cuprind electroni, neutrini și miuoni.

Între particule există și interacțiuni foarte slabe, de natură gravitațională, care se presupune că se produc prin intermediul unei particule de masă foarte mică, numit graviton și care, experimental, nu a fost pusă în evidență.

Interacțiunile particulelor grele încărcate electric au ca rezultat ionizarea și excitarea atomilor substanței străbătute.

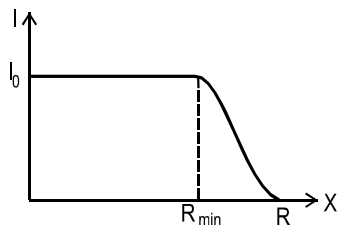


Figura 11.2

Particulele cu masă mare sunt deviate puțin după ciocnirea cu electronii, deci traiectoria lor este practic liniară. La energii mici și medii, principalul proces îl constituie ionizarea, energia medie necesară formării unei perechi de ioni este mică și de aceea, pentru $x < R_{\min}$, așa cum se observă în figura 11.2, intensitatea fluxului de particule rămâne constantă. Parcursul depinde de natura și de energia particulei, precum și de natura substanței străbătute. La energii mari, particulele grele produc reacții nucleare.

Trecerea electronilor prin substanță determină, la energii mici ale electronilor, pierderi de energie prin ionizarea substanței. La energii mari, deplasarea accelerată a electronilor duce la emisia radiației de frânare, ceea ce reprezintă de fapt o pierdere de energie a electronului, ca urmare a deplasării sale. Radiația de frânare este radiația electromagnetică emisă în

procesul de mișcare încetinită a particulelor încărcate cu sarcina electrică. Pierderea de energie prin radiația de frânare crește cu mărirea numărului atomic al substanței străbătute și cu energia electronilor. Traectoria electronilor este sinuoasă, iar atenuarea se face după o lege aproximativ exponențială (fig.11.3).

Atenuarea radiației gama are loc legea exponențială:

$$I = I_0 \exp^{-\mu x}, \quad (11.10)$$

unde I_0 este intensitatea radiației incidente, I este intensitatea radiației după traversarea unui mediu de grosime x , iar μ este coeficientul de absorbție, care depinde de natura materialului absorbant. Atenuarea radiației gama este reprezentată în figura 11.4, iar coeficientul liniar de atenuare μ , este dependent de energia fotonilor.

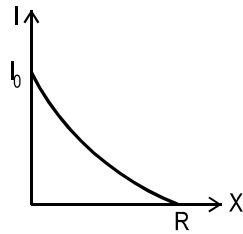


Figura 11.3

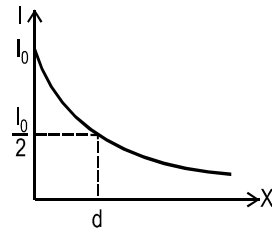


Figura 11.4

Procesele care intervin la interacțiunea radiației gama cu materialul absorbant sunt: efectul fotoelectric, efectul Compton și generarea de perechi în care un foton, cu energia mai mare decât 1MeV , la trecerea prin câmpul unui nucleu, generează o pereche electron-pozitron.

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+;$$

$$\mu = \mu_F + \mu_c + \mu_p.$$

La energii mari, fotonii pot produce reacții fotonucleare.

11.6. Reacții nucleare

Reacțiile nucleare sunt procesele care se produc în urma interacțiunii nucleelor cu alte nuclee, cu radiații corpusculare sau cu radiații corpusculare sau cu radiații electromagnetice și care au ca efect, fie transformarea

nucleelor inițiale, fie modificarea stării lor energetice. Ecuația unei reacții nucleare este:

$$X + a \rightarrow Y + b \text{ sau } X(a, b)Y \quad (11.11)$$

unde X reprezintă nucleul țintă, a este particula proiectil, Y reprezintă nucleul rezultat și b este particula emergentă.

Reacțiile nucleare fundamentale, relațiile (11.11), includ diverse procese și anume:

- dacă $X = Y$ și $a = b$, se produce o împrăștiere elastică dacă a și b nu-si schimbă starea internă și variază doar energia cinetică și o împrăștiere neelastică, dacă se modifică starea internă a particulelor care se ciocnesc;
- dacă $X \neq Y$ are loc o transmutație nucleară;
- dacă $a = \text{foton}$ și $b \neq \text{foton}$ se produce o reacție fotonucleară;
- dacă $a \neq \text{foton}$ și $b = \text{foton}$, se produce o captura radiativă;

La scrierea reacțiilor nucleare se respectă conservarea numărului atomic și a numărului de masă. Reacțiile nucleare satisfac legea de conservare a momentului cinetic total, legea de conservare a impulsului și a energiei totale. Pentru reacția (11.11) legea conservării energiei totale este:

$$M_{0X} \cdot c^2 + T_X + m_{0a} \cdot c^2 + T_a = M_{0Y} \cdot c^2 + T_Y + m_{0b} \cdot c^2 + T_b$$

unde M_{0X} , m_{0a} , M_{0Y} , m_{0b} sunt mase de repaus ale participanților la reacții, iar T este energia cinetică. Reacțiile nucleare se produc cu emisie sau cu absorbție de energie.

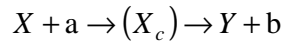
Energia de reacție Q este dată de expresia:

$$Q = (T_Y + T_b) - (T_X + T_a) = [(M_{0X} + m_{0a}) - (M_{0Y} + m_{0b})] \cdot c^2$$

Dacă $Q > 0$, reacția este exoenergetică, iar dacă $Q < 0$, reacția este endoenergetică.

Modul de desfășurare a reacțiilor nucleare se poate explica prin mecanismele de reacție. Pentru nuclee cu $A > 10$ și energia particulelor până la 50MeV, se poate aplica mecanismul nucleului compus, conform căruia reacția se desfășoară în doua etape. În prima etapă, particula proiectil pătrunde în nucleu, interacționează cu nucleonii acestuia, le cedează energia

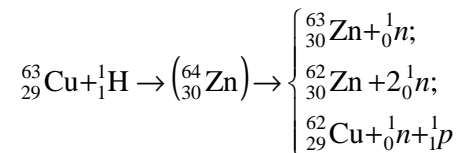
care este distribuită uniform tuturor nucleonilor, astfel încât se formează un nucleu intermediar puternic excitat (X_c). în acest caz:



Viața nucleului intermediar este relativ lungă, de 10^{-16} s față de durata de interacțiune nucleară care este aproximativ 10^{-23} s.

În a doua etapă se produc fluctuații ale distribuției energiei între nucleoni, în urma cărora se poate crea o nouă microparticulă, care este expulzată de către nucleul intermediar. Astfel, un nucleu intermediar se poate dezintegra în mai multe moduri.

De exemplu:

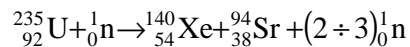


Reacțiile nucleare cu o semnificație deosebită sunt fisiunea și fuziunea nucleară.

Fisiunea nucleară este o reacție exoenergetică, care constă în scindarea unui nucleu greu în două sau mai multe nuclee de mase comparabile. Reacția este produsă de neutroni, dar există cazuri când este declanșată de particule alfa, protoni, deuteroni, fotoni gama sau se realizează spontan. Energia eliberată în reacția de fisiune se distribuie nucleelor emergente, precum și neutronilor care rezultă din reacție.

Explicarea reacției de fisiune se face pe baza modelului nuclear al picăturii. Se consideră că prin captura unui neutron, se realizează un nucleu intermediar puternic excitat; în aceasta stare, structura nivelelor energetice ale nucleonilor dispare și nucleul se comportă ca o picătură de lichid. Stabilitatea nucleului este determinată de echilibrul dintre energia superficială și energia de respingere electrostatică.

Diviziunea nucleului fisionat este foarte variată și în general cele două fragmente posedă mase și energii diferite. S-au identificat peste 80 de produși finali ai fisiunii nucleului de ${}_{92}^{235}\text{U}$ ale căror numere de masă se grupează în jurul valorilor 95 și 139. Un exemplu de fisionare este:



Produsele de fisiune, posedând un exces de neutroni, se dezintegrează emițând radiații β^- , fotoni gama și neutroni întârziți. În anumite condiții de dimensionare a substanței fisionabile precum și prin confecționarea unor pereți reflectanți, se ajunge la situația în care se realizează masa critică și atunci neutronii secundari inițiază noi acte de fisiune producând o reacție în lanț. Masa critică reprezintă cantitatea minimă de material fisionabil care asigura dezvoltarea unei reacții nucleare în lanț.

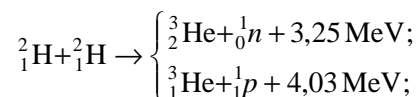
Reactorul nuclear este o instalație în care se efectuează o reacție de fisiune controlată.

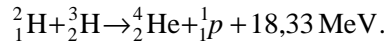
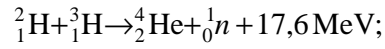
Prin fuziune nucleară se înțelege procesul de unire a două nuclee având ca rezultat formarea unui nou nucleu și degajarea unei mari cantități de energie, pe seama defectului de masă. Din figura 11.1 rezultă că reacțiile de sinteză ale elementelor ușoare sunt exoenergetice deoarece în valoare absolută, energia de legătură pe nucleon a nucleului final este mai mare decât suma energiilor de legătură a nucleelor inițiale. Energia eliberată într-un ciclu de fuziune este superioară celei obținute în cazul fisiunii.

Sinteza a două nuclee ușoare se face atunci când energia lor cinetică este foarte mare și poate fi depășită bariera de potențial. În cazul a doi protoni care se apropie până la o distanță egală cu diametrul lor, este necesară o viteză medie corespunzătoare temperaturii de 10^9 K. Substanța aflată în asemenea condiții de temperatură se prezintă sub formă de plasmă fierbinte și de aceea reacția se numește termonucleară. Declanșarea reacțiilor de sinteză se poate produce și la temperaturi de aproximativ 10^8 K prin efect tunel.

Reacțiile de fuziune constituie sursa de energie a Soarelui și a stelelor.

Dificultatea principală în declanșarea reacțiilor termonucleare este obținerea temperaturilor foarte înalte. În condiții de laborator, trebuie să se realizeze, pe lângă temperatura ridicată, o densitate mare, precum și un timp de existență a plasmei, în reacții de tipul:





În încercarea de a amorsa reacții termonucleare controlate, s-a dezvoltat magnetohidrodinamica, care studiază comportarea plasmei în câmpul electromagnetic.

Aplicații

11.2. Un proton cu energia cinetică 110 keV este deviat de nucleul He_2^4 sub unghiul $\theta = \frac{\pi}{2}$ față de direcția incidentă. Să se calculeze energia protonului și a nucleului de recul după împrăștiere.

Rezolvare:

Se presupune ciocnirea elastică ($Q = 0$) și că nucleul țintă era în repaus înainte de ciocnire.

Se scriu legile conservării energiei și impulsului:

$$m \frac{v_1^2}{2} = m \frac{v_1'^2}{2} + M \frac{v_2'^2}{2}$$

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1' + M\vec{v}_2'$$

Se obține:

$$\mathcal{E}_1' = m \frac{v_1'^2}{2} = 60 \text{ keV};$$

$$\mathcal{E}_2' = M \frac{v_2'^2}{2} = 40 \text{ keV}.$$

11.3. Mărind grosimea unui strat de apă cu 2,5 cm, intensitatea unui fascicul de raze X, transmis, se micșorează de trei ori. Să se determine coeficientul de atenuare al apei.

Rezolvare:

$$I = I_0 e^{-\mu \cdot d}$$

$$\frac{I}{3} = I_0 e^{-\mu(d+2,5)}$$

Deci:

$$\mu = \frac{\ln 3}{2,5} = 0,439 \text{ cm}^{-1}.$$

11.4. Să se calculeze energia totală care s-ar elibera prin fisiunea completă a unui kg de ${}^{235}_{92}\text{U}$. Prin fiecare act de fisiune, se eliberează energia

$\Delta W = 210 \text{ MeV}$. Care este masa M a petrolului, cu puterea calorică $q = 5 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, care ar produce aceeași energie prin ardere completă.

11.5. Intensitatea unui fascicul îngust de radiații scade de 8 ori după ce străbate un strat de plumb de grosime $0,04 \text{ mm}$. Să se calculeze grosimea de înjumătățire a fascicolului incident.

11.6. Să se calculeze energia de recul a nucleului $^{206}_{82}\text{Pb}$ ce se obține prin dezintegrarea α a radionuclidului $^{210}_{84}\text{Pb}$.

TEST DE AUTOEVALUARE IV

1. O mică bilă de aur este uniform iradiată cu radiație electromagnetică ultravioletă ($\lambda = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$). Până la ce valoare a potențialului electric se poate încărca bila ?

- a) ~~2V~~; b) ~~1,6V~~; c) ~~2,5V~~; d) ~~3V~~; e) ~~3,5V~~; f) ~~4,6~~.

2. Suprafața unui metal este iluminată cu o radiație electromagnetică de frecvență $\nu_1 = 8,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ și apoi cu o alta de frecvență $\nu_2 = 5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Se constată că vitezele maxime ale fotoelectronilor în cele două cazuri diferă printr-un factor de .

Aflați lucrul mecanic de extracție al acestui metal.

- a) ~~1,6 V~~; b) ~~2,6V~~; c) ~~3,6 V~~; d) ~~4,6V~~; e) ~~2V~~; f) ~~3V~~.

3. Un fascicul de electroni cade pe un monocristal de nichel cu distanța interplanară $d = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, după care este reflectat și produce o rețea de difracție. Știind că unghiul dintre direcția incidentă și direcția reflectată corespunde maximului central de difracție $\theta = \frac{\pi}{3}$, să se arate care este potențialul accelerator:

- a) ~~36,5V~~; b) ~~40,5V~~; c) ~~41,5V~~; d) ~~46,5V~~; e) ~~26,5V~~; f) ~~30V~~.

4. Între plăcile unui condensator plan paralel așezat orizontal, cu intensitatea câmpului între plăci, $E = \frac{100V}{m}$, se află în echilibru o picătură sferică de apă cu raza $r = 6\mu$. Să se determine care este numărul sarcinilor elementare pe care le posedă picătura:

- a) ~~554742 electroni~~; b) 54742 electroni; c) 645772 electroni; d) 254775 electroni; e) 154772 electroni; f) 445752 electroni.

5. Mărind grosimea unui strat de apă cu ~~2,5 cm~~ intensitatea unui fascicul de raze X, transmis, se micșorează de trei ori. Să se determine care este coeficientul de atenuare al apei:

- a) ~~0,439 cm⁻¹~~; b) ~~0,49 cm⁻¹~~; c) ~~0,349 cm⁻¹~~; d) ~~0,50 cm⁻¹~~; e) ~~0,5 cm⁻¹~~; f) ~~0,934 cm⁻¹~~.

SOLUȚIILE TESTELOR DE EVALUARE

TESTE I. 1.b; 2.a; 3.e; 4.c; 5.d; 6.f; 7.a; 8.e; 9.c; 10.f.

TESTE II. 1.a; 2.c; 3.f; 4.f; 5.c; 6.a; 7.b.

TESTE III.1.a; 2.b; 3.b; 4.f; 5.c; 6.a; 7.b; 8.e; 9.d; 10.c.TESTE

TESTE IV. 1.b; 2.a; 3.a; 4.a; 5.a.

BIBLIOGRAFIE

1. Brenneke R., Schuster G. – *Fizica*, E.D.P., București, 1973.
2. Burro E. – *Fizica fenomenelor magnetice*, vol. I, Ed.Academiei, 1979.
3. Borneas M. – *Fizica atomică și a radiației electromagnetice*, Lito IPT, Timișoara, 1980.
4. Chpolski E. – *Physique atomique*, Editions Mir, 1977.
5. Crețu T. – *Fizica generală*, vol. I, Ed.Tehnică, București, 1984.
6. Cristea Gh., Ardelean I. – *Elemente fundamentale de fizică*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1980.
7. Crețu I., Preda T., Grizdeanu M., – *Fizica*, E.D.P, București, 1974.
8. Dumitru S., – *Microfizica*, Ed. Dacia, Cluj- Napoca, 1984.
9. Davydov A. – *Theorie du Solide*, Editions Mir, 1980.
10. Dorobanțu V., Mihalca I. – *Fizică II*, Lito IPT, Timișoara, 1984.
11. Ercuța A. – *Fizica*, Ed. U.T. Timișoara, 1992.
12. Feynman R. P. – *Fizica modernă*, Ed.tehnică, București, 1970.
13. Gherman O. – *Fizica statistică*, Ed. Tehnică, București, 1976.
14. Hutten E. – *Ideile fundamentale ale fizicii*, Ed. Enciclopedică Română, București, 1970.
15. Halliday D., Resnick R. – *Fizica*, vol. I. E.D.P., București, 1975.
16. Ința I., Dumitru S. – *Complemente de fizică*, Ed. Tehnică, București, 1982.
17. Irimiciuc N. – *Mecanica E.D.P.*, București, 1965.
18. Iacob C. – *Mecanica teoretică*, E.D.P., București, 1980.
19. Jeludev I. S. – *Simetria și aplicațiile ei*, Ed. Tehnică, București, 1979.
20. Kittel Ch, Knight W., Ruderman M. – *Cursul de fizică Berkeley*, vol.I, II, III, București,1981.
21. Luca E. – *Fizica*, E.D.P., București, 1976.
22. Landau D., Lifșitș E. – *Mecanica cuantică*, București, Red. Tehnică, 1965.
23. Landau D., Lifșitș E. – *Fizica Statistică*, București, 1988.

24. Luca E. și colab. – *Fizica*, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1976.
25. Luca E., Bărboiu V. – *Analiza structurală prin metode fizice*, Ed. Academiei, București, 1984.
26. Landau et Lifchitz – *Mecanique quantique*, Editions Mir, Moscou, 1980.
27. Max Born – *Fizica atomică*, Ed. Științifică, București, 1973.
28. Mittelstaedt P. – *Probleme filozofice ale fizicii moderne*, Ed. Științifică, București, 1971.
29. Muscalu St. – *Fizica atomică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980.
30. Messiah A. – *Mecanică cuantică*, vol.I, II, Ed. Științifică, București, 1973.
31. Moisil G. – *Fizica pentru ingineri*, Vol. I, Ed. Tehnică, București, 1968.
32. Moisil G., Huțanu G. – *Fizica generală*, E.D.P. București, 1968.
33. Nicula Al., Cristea Gh., Simion S. – *Electricitate și magnetism*, E.D.P. București, 1982.
34. Nicula Al. – *Fizica semiconductorilor și aplicații*, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1975.
35. Nicolau E. – *Radiația electromagnetică*, Ed. Acad. 1973.
36. Oncescu M. – *Fizica*, E.D.P., București, 1973.
37. Popescu I. – *Fizica*, vol. I, E.D.P., București, 1982.
38. Pop I., Niculescu V. – *Structura corpului solid*, Ed. Academiei, București, 1971.
39. Pop I. – *Fizica moleculară și căldura*, E.D.P., București, 1975.
40. Roy M. – *Thermodynamique macroscopique*, Paris, Dunod, 1964.
41. Schaim U., Cros L., Dodge J., Wlater J. – *Fizica*, E.D.P., București, 1975.
42. Spânulescu I., Pârvan R. – *Principiile fizice ale microelectronicii*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1981.
43. Sandu D. – *Electronica fizică*, Ed. Fizică, Ed. Academiei, București, 1973.

44. Sălceanu C. – *Căldură și termodinamică*, E.D.P., București, 1968.
45. Sterian P. – *Mecanica relativistă și noțiuni de teoria gravitației*, Ed. Tehnică, București, 1979.
46. Sears F., Zemanski M. – *Fizica*, E.D.P.
47. Sirontin I., I., Saskolskaia – *Fizica cristalelor*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1981.
48. Shyh Wang, prof of Berkeley – *Solid State Electronics*, Mc. Graw – Hill Book Company, New – York, 1966.
49. Șandru L. – *Tehnica de investigație a materialelor ceramice și bazaltice*, Ed. Romatest, București, 1992.
50. Șandru L. – *Proprietățile dielectrice și feroelectrice ale materialelor ceramice*, Ed. Romatest, București, 1992.
51. Tudose C. C. – *Fizica atomică și nucleară*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
52. Tudose C., Cucurezeanu I. – *Fizica*, E.D.P., București, 1981.
53. Tudose C., Căplănuș I., Bostan M. – *Mecanica fizică acustică și căldura*, E.D.P., București, 1976.
54. Țițeica R., Popescu I. – *Fizica*, vol. I și II, Ed. Tehnică, București, 1971.
55. Țițeica R. – *Elemente de fizică statistică*, Ed. Tehnică, București, 1956.
56. Vasiliu M. – *Fizica teoretică*, E.D.P., 1965.
57. Vasiliu M. – *Electrodinamica și teoria relativității*, E.D.P., București, 1979.
58. Voinea R., Voiculescu D., Ceaușu V. – *Mecanica*, E.D.P., 1975.
59. Wichmann E. H. – *Physique quantique*, Librairie Armand Colin, Paris, 1974.
60. Yavorsky B., Detlaf A. – *A modern handbook of physics*, Moscow, 1982 (English translation).